

UNIwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki



Model matematyczny referendum
z progiem większości kwalifikowanej
zależnym od frekwencji

JOANNA BIGOS

Opiekun pracy:

dr hab. Wojciech Słomczyński

KRAKÓW 2016

Składam serdeczne podziękowania
Panu dr. hab. Wojciechowi Słomczyńskiemu
za poświęcony czas, cenne uwagi
oraz życzliwość.

1	Model referendum	6
2	Przepisy konkluzywności referendum w krajach europejskich	10
2.1	Progi frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak	10
2.2	Wykresy zbiorów wygrywających	17
3	Wpływ zmiany decyzji pojedynczego wyborcy negatywnego na rezultat referendum	22
3.1	Sytuacja ogólna	22
3.2	Sytuacje pożądane i niechciane	24
3.3	Wektory zmiany decyzji wyborcy negatywnego dla referendum europejskich . . .	24
3.4	Wektory zmiany decyzji wyborcy negatywnego w modelu M_a	30
3.4.1	Wynik na dolnym brzegu zbioru wygrywającego	30
3.4.2	Wszystkie wyniki	36

W niniejszej pracy zajmujemy się problemem referendum. W systemach referendalnych stosowanych w różnych krajach (w tym w Polsce) do zaakceptowania propozycji zmiany poddanej pod głosowanie potrzebne jest kworum, czyli ustalony w przepisach próg frekwencji. W przypadku, gdy nie zostaje on osiągnięty, rezultatem pozostaje stan sprzed wyborów — *status quo*. Gdy natomiast frekwencja przekracza kworum, zaś większość głosujących opowiada się za zmianą, to wchodzi ona w życie. Każdy wyborca może podjąć jedną z trzech decyzji: zagłosować za propozycją, przeciw niej albo nie pójść na referendum. Dla osób, które chciałyby, żeby wynik był negatywny, korzystne może okazać się zarówno głosowanie przeciwko, jak i również wstrzymanie się od głosu, bo w tym drugim przypadku frekwencja zmaleje i kworum może nie zostać osiągnięte. Często taki wyborca decyduje, na podstawie wyników sondaży przedwyborczych, która możliwość z większym prawdopodobieństwem może przynieść mu satysfakcjonujący rezultat. Gdy większość wyborców deklaruje głos za zmianą, wtedy bardziej korzystne może być niepójście na referendum, by w ten sposób spróbować zerwać frekwencję. Natomiast w sytuacji, gdy w sondażu głosy przeciwne propozycji przeważają, wyborca właśnie idąc na wybory może zwiększyć szanse jej odrzucenia.

Przykładem referendum, w którym wyborcy, wstrzymując się od głosu, uzyskali korzystny dla siebie rezultat, było głosowanie w sprawie odwołania z funkcji prezydenta miasta stołecznego Warszawy Hanny Gronkiewicz-Waltz w 2013 roku. Żeby wybory były wiążące, wymagana była frekwencja co najmniej 29,1%¹, jednak w referendum udział wzięło jedynie 25,7% mieszkańców stolicy. Pomimo, że ponad 90% osób biorących udział w referendum zagłosowało za odwołaniem prezydenta, referendum nie było ważne. Gdyby jednak część osób przyszła i zagłosowała przeciwko, wynik wyborów uległby zmianie na ich niekorzyść. Taki system referendalny nie wydaje się dobrze służyć demokracji, ponieważ nie zachęca on ogółu wyborców do wzięcia udziału w głosowaniu. Odmienny system, w którym nie jest wymagane osiągnięcie progu frekwencji, jest stosowany między innymi w Chorwacji, Estonii czy Szwecji. W takim systemie nie doszłoby więc do sytuacji podobnej jak w 2013 roku w Warszawie. Wadą jego jest jednak możliwość decydowania o sprawach państwowych przez niewielką grupę wyborców (w skrajnym

¹Czyli 60% z liczby osób biorących udział w wyborach prezydenta Warszawy w 2010 roku.

przypadku mogłaby to być nawet jedna osoba).

Ponieważ dla osób, które są za zmianą, zawsze korzystniej jest wziąć udział w głosowaniu (gdyż zwiększa się wtedy zarówno frekwencja, jak i odsetek głosów za), założyliśmy więc, że takie osoby nie będą mieć dylematu i wszystkie pójdą na referendum. Przeanalizowaliśmy następnie, czy i kiedy zmiana głosu pojedynczego wyborcy, który jest przeciw propozycji, może mieć wpływ na rezultat wyborów. Celem pracy było wyłonienie takiego modelu, w którym osoba chcąca głosować na nie, idąc na wybory, albo nie wpłynie na ich wynik, albo jego zmiana będzie dla niej korzystna, a decydując się na wstrzymanie od głosu, może uzyskać jedynie zmianę dla siebie niepożądaną. Chcieliśmy również, żeby wynik referendum mógł być wiążący przy każdej frekwencji. Skonstruowaliśmy więc rodzinę modeli, w których **próg większości kwalifikowanej** (czyli stosunek głosów na tak do wszystkich oddanych głosów) **zależy od frekwencji**. Postulowaliśmy również, żeby dla zerowej frekwencji próg ten wynosił 100%, a gdy wszyscy wyborcy zagłosują, spadał do 50%. Punkty reprezentujące te dwie skrajne możliwości umieszczone na wykresie, w którym na osi odciętych zaznaczamy frekwencję, zaś na osi rzędnych odsetek głosów na tak, łączymy parabolą. Współrzędne punktów leżących na tej paraboli wyznaczają zależność pomiędzy frekwencją a progiem większości kwalifikowanej. Oczywiście, rzędne tych punktów muszą mieścić się w przedziale od 50% do 100%. Warunek ten określa nam rodzinę funkcji kwadratowych $M_a : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ ($a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) danych wzorem²

$$M_a(t) := at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$$

dla $t \in [0, 1]$. Tak więc w tym modelu wniosek poddany pod referendum zostaje przyjęty, gdy dla frekwencji $t \in [0, 1]$ i stosunku głosów na tak do wszystkich oddanych głosów wynoszącym $m \in [0, 1]$, spełniony jest warunek

$$m \geq M_a(t).$$

Zauważmy, że w pracach [1–3] autorzy badali matematyczne modele referendów w podobnym kontekście, ale nie rozważali sytuacji, w której próg większości kwalifikowanej zależy od frekwencji.

Gdyby zastosowano ten system podczas referendum za odwołaniem prezydent Hanny Gronkiewicz-Waltz dla $a = -\frac{1}{2}$ nie zostałaby ona odwołana, ale w przypadku $a = 0$ lub $a = \frac{1}{2}$ przeciwnicy Hanny Gronkiewicz-Waltz przeforsowaliby swój wniosek. Natomiast w referendum, które odbyło się w Wielkiej Brytanii w 2016 roku w sprawie wyjścia tego państwa z Unii Europejskiej (tzw. Brexitu) dla każdego $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ rezultat referendum byłby negatywny, czyli Wielka Brytania pozostałaby w Unii Europejskiej.

Moją pracę skonstruowałam w następujący sposób. W ustawach, konstytucjach i innych aktach prawnych znalazłam fragmenty dotyczące progów frekwencji, większości kwalifikowanej lub też progu głosów na tak dla referendów stosowanych w krajach europejskich (dla kilku krajów informacje te odnalazłam w artykułach [1–6] oraz w książce [7]). Zdefiniowałam, czym

²Dla $a = 0$ otrzymujemy funkcję liniową daną wzorem $M_0(t) := 1 - \frac{t}{2}$, $t \in [0, 1]$.

różni się wynik referendum od jego rezultatu; opisałam, jak sprawdzić, który wynik jest wiążący i rozstrzyga na tak. Skonstruowałam rodzinę modeli zależnych od parametru, w których próg większości kwalifikowanej zależy od frekwencji. Sprawdziłam, jak wynik referendum zmieniłyby się, gdyby jeden z wyborców głosujących na nie postanowił zmienić decyzję i nie iść na wybory lub jeśli wyborca, który nie poszedł na wybory zagłosowałby przeciwko. W pracy sformułowałam i udowodniłam trzy twierdzenia, które opisują, jak zmienia się rezultat referendum, przy zmianie decyzji wyborcy w rozpatrywanym modelu, w zależności od parametru. Na końcu przedstawiłam, jak wiele jest sytuacji, w których wyborca ma decydujący głos, w zależności od liczby osób uprawnionych do głosowania. Obliczenia wykonywałam w programie RStudio. Na podstawie wykresów zależności liczby tych sytuacji od liczby wyborców, przedstawiłam pewną hipotezę i porównałam modele.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy przedstawia, czym jest referendum. Wprowadzamy podstawowe definicje i zależności. Kolejny rozdział przybliży modele stosowane w różnych krajach. Na początku na podstawie aktów prawnych przedstawiamy obowiązujące progi, a następnie obrazujemy to na wykresach. W trzecim rozdziale przedstawiamy wpływ zmiany decyzji pojedynczego wyborcy głosującego przeciwko propozycji na rezultat referendum. Pokazujemy zmianę wyników po zmianie jego decyzji i sprawdzamy, czy może ona mieć wpływ na końcowy rezultat. Szczególną uwagę zwracamy na zbiór wyników, dla których wyborca w zbudowanym przez nas modelu ma głos decydujący.

Referendum, nazywane również głosowaniem ludowym, polega na bezpośrednim wypowiedzeniu się obywateli uprawnionych do głosowania (wyborców) w danej sprawie poddanej pod głosowanie, ze skutkiem wiążącym lub opiniodawczym [8].

Definicja 1. Wyborcę, który jest na tak (czyli chce, żeby rezultat referendum był pozytywny) nazywamy *wyborcą pozytywnym*, a tego, który jest na nie — *wyborcą negatywnym*.

W niniejszym opracowaniu będziemy rozważać referendum, w którym każdy obywatel uprawniony do głosowania może zagłosować za lub przeciw propozycji poddanej pod głosowanie, bądź też nie brać udziału w głosowaniu. Zakładamy, że każdy wyborca wie, jaki rezultat referendum chciałby uzyskać oraz że wszyscy wyborcy pozytywni pójdą na wybory i zagłosują na tak¹, a wyborca negatywny wybiera pomiędzy głosowaniem przeciw a wstrzymaniem się od głosu.

Niech k oznacza liczbę wszystkich osób uprawnionych do głosowania, k_y — liczbę wyborców, którzy głosowali na tak, a k_n — liczbę wyborców, którzy głosowali na nie, y — odsetek osób uprawnionych do głosowania głosujących na tak, n — odsetek osób uprawnionych do głosowania głosujących na nie, t — frekwencję w referendum, zaś m — stosunek liczby głosów na tak do liczby wszystkich oddanych głosów.

Między wielkościami tymi zachodzą następujące oczywiste zależności:

$$\begin{aligned}y &:= \frac{k_y}{k}, \\n &:= \frac{k_n}{k}, \\t &:= \frac{k_y + k_n}{k} = y + n,\end{aligned}$$

¹Założenie to, chociaż nie do końca realistyczne, upraszcza nasz model.

$$m := \begin{cases} \frac{k_y}{k_y + k_n} & \text{dla } t \neq 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

oraz

$$y = mt.$$

Znając k_y , k_n oraz k możemy wyznaczyć pozostałe wielkości. Zakładamy², że $k \in \mathbb{N}$, $k_y \in \{0, 1, \dots, k\}$ i $k_n \in \{0, 1, \dots, k\}$. Wynika stąd, że y , n i t są z przedziału $[0, 1]$ i dla ustalonego k są postaci $\frac{p}{k}$ dla $p = 0, \dots, k$, zaś m jest postaci $\frac{\alpha}{\beta}$, gdzie $\alpha \leq \beta$ oraz $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ i $\beta \in \{0, \dots, k\}$.

Definicja 2. Trójkę (t, m, y) nazywamy *wynikiem referendum*.

Dla ustalonego k liczba wszystkich możliwych wyników jest równa

$$N(k) := \sum_{i=0}^k (i+1) = \frac{1+(k+1)}{2}(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ze względu na to, że wielkości t , m oraz y są zależne od siebie, przepisy dotyczące referendum uwzględniają zwykle jedną lub dwie z nich.

Definicja 3. Mówimy, że wynik referendum (t, m, y) jest *wiążący i rozstrzyga na tak*, jeśli dla ustalonego (w przepisach danego kraju) progu frekwencji $T \in [0, 1]$, progu większości kwalifikowanej $M \in [\frac{1}{2}, 1]$ oraz progu głosów na tak $Y \in [0, 1]$: $t \geq T$ i/lub $m \geq M$ i/lub $y \geq Y$ ³.

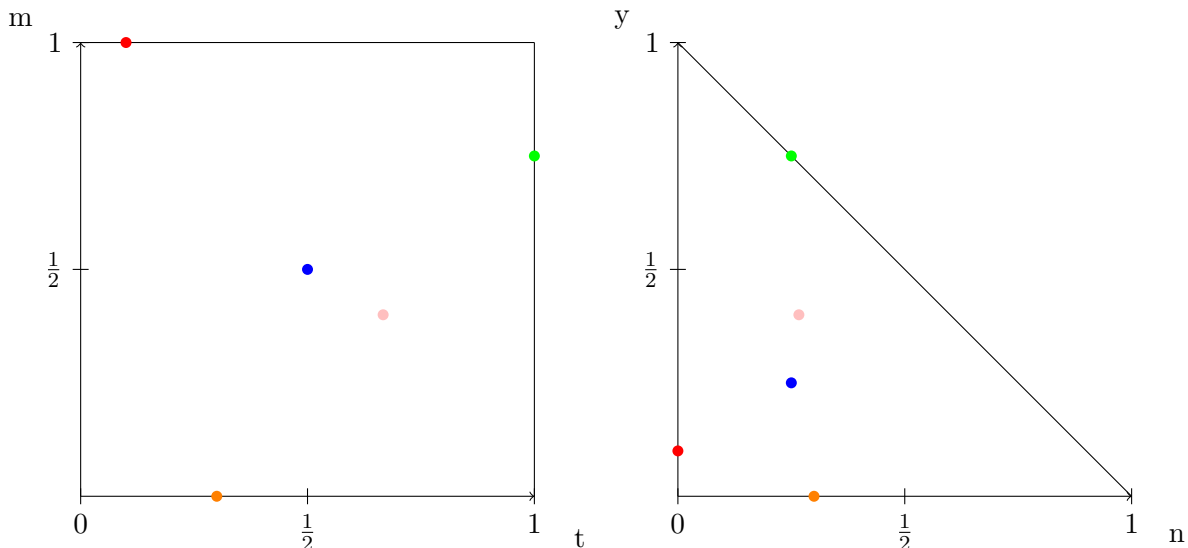
Rezultat referendum jest pozytywny, gdy jest ono wiążące i rozstrzyga na tak, a w przeciwnym wypadku jest *negatywny*.

Dla ustalonych w przepisach progów, spośród wszystkich możliwych wyników referendum, możemy znaleźć takie, dla których rezultat jest pozytywny. Wynik referendum można przedstawiać w dwuwymiarowym układzie współrzędnych. Zbiory wszystkich wyników mogą wyglądać różnie, jednak w pracy wybraliśmy dwa sposoby ich prezentacji: zależność m od t — wszystkie możliwe wyniki należą do zbioru $[0, 1]^2$ oraz zależność y od n — zbiór wyników zawiera się w równoramiennym trójkącie prostokątnym $\{(n, y) \in [0, 1]^2 : y + n \leq 1\}$.

Poniższe wykresy przedstawiają te dwa sposoby graficznej reprezentacji wyników referendum. Punkty w tym samym kolorze przedstawiają te same wyniki referendum. Trzy boki kwadratu przechodzą w boki trójkąta, a jeden bok $\{0\} \times [0, 1]$ przechodzi w punkt $(0, 0)$ (w rzeczywistości jedyny możliwy wynik z tego boku to punkt $(0, 0)$).

² $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

³W zależności od przepisów nierówności są słabe lub silne.



Rysunek 1.1: Graficzna ilustracja wyników referendum na wykresie zależności m od t oraz y od n .

Definicja 4. Zbiory $V = \{(t, m) \in [0, 1]^2 : t \geq T, m \geq M, mt \geq Y\}$ ⁴ oraz $\bar{V} = \{(n, y) \in [0, 1]^2 : y \geq Y, y \geq T - n, y \geq \frac{Mn}{1-M}, y \leq 1 - n\}$ ⁴ nazywamy *zbiorami wygrywającymi* dla progu frekwencji T , progu większości kwalifikowanej M oraz progu głosów na tak Y .

Stąd wynik referendum (t, m, y) daje rezultat pozytywny, gdy $(t, m) \in V$ (odpowiednio $(t - y, y) \in \bar{V}$) lub rezultat negatywny dla $(t, m) \notin V$ (odpowiednio $(t - y, y) \notin \bar{V}$).

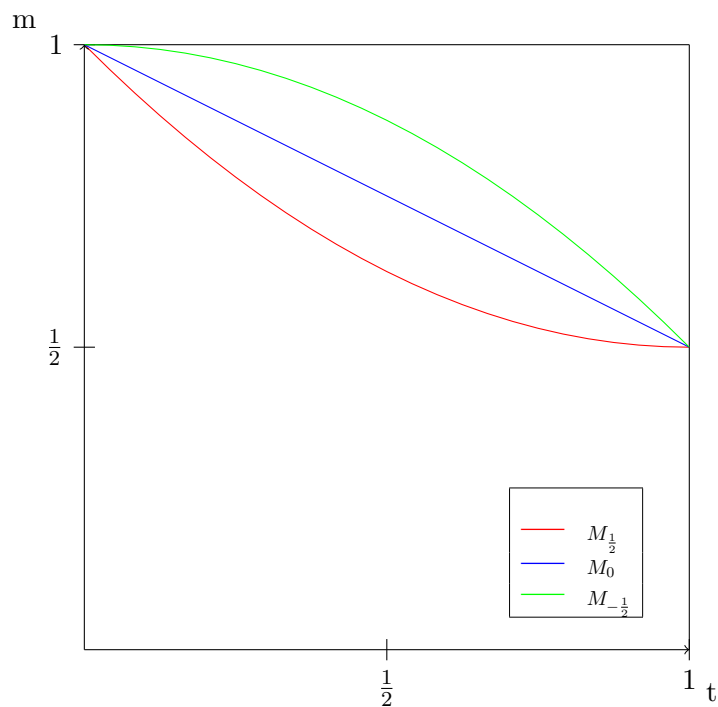
Definicja 5. Zbiór $\{(t, m) \in [0, 1]^2 : t = T \vee m = M \vee mt = Y\}$ oraz $\{(n, y) \in [0, 1]^2 : y = Y \vee y = T - n \vee y = \frac{Mn}{1-M}\}$ nazywamy *dolnym brzegiem zbiorów wygrywających*, odpowiednio, V i \bar{V} .

W pracy tej będziemy rozważać referendum, w którym próg większości kwalifikowanej uzależniony jest od frekwencji t . Analizowana będzie rodzina funkcji

$$M_a(t) := at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1,$$

dla $t \in [0, 1]$, gdzie $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

⁴W zależności od przepisów nierówności są słabe lub silne.



Rysunek 1.2: Wykresy funkcji M_a dla $a \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

Wybraliśmy ją, ponieważ na przedziale $[0, 1]$ funkcja M_a jest malejąca, dla maksymalnej frekwencji próg jest równy $\frac{1}{2}$, a przy frekwencji równej 0 wynosi 1. Innymi słowy, w naszym modelu wynik referendum (t, m, y) jest wiążący i rozstrzyga na tak, gdy $m \geq M_a(t)$.

Przepisy konkluzywności referendum w krajach europejskich

W tym rozdziale przedstawimy przepisy dotyczące referendum w niektórych krajach Europy. Chcemy sprawdzić, czy stosując takie systemy wyborca, który chciałby negatywnego rezultatu referendum, może nie idąc na wybory doprowadzić do zmiany pozytywnego rezultatu na negatywny. Taka zmiana z punktu widzenia wyborcy negatywnego zachęcałaby go do niepójścia na referendum.

2.1 Progi frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak

Tabela 2.1 przedstawia progi frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak oraz fragmenty aktów prawnych dla wybranych krajów europejskich (dla pozostałych państw nie znaleźliśmy aktów prawnych, które podają progi frekwencji, większości kwalifikowanej lub głosów na tak). Warto zwrócić uwagę, że nie zawsze takie same progi oznaczają ten sam model referendum, ponieważ przepisy czasem zakładają, że dolny brzeg zbioru wygrywającego zawiera się w nim, a niekiedy nie.

Kraj	T	M	Y	Fragment aktu prawnego
Albania [9]		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	Art. 118 W referendum, opcję, która otrzymała większość ważnie oddanych głosów i nie mniej niż jedną trzecią liczby osób zapisanych w Narodowym Rejestrze Głosujących, uważa się za zwycięską, o ile w niniejszym rozdziale nie przewidziano inaczej.
Andora [10]		$\frac{1}{2}$		Art. 70 Poprawka Konstytucji powinna być zatwierdzona, jeśli liczba głosujących za tą poprawką przekracza liczbę głosów przeciwko.

Austria [11]		$\frac{1}{2}$		Art. 45 W referendum absolutna większość ważnie oddanych głosów jest decydująca.
Belgia [12]				Art. 33 Wszelka władza pochodzi od Narodu. Sposób sprawowania władzy określa Konstytucja. [Brak referendum ogólnonarodowego - „Przede wszystkim konstytucja głosi, że wszelka władza pochodzi od narodu i sposób jej sprawowania określa Konstytucja, w skrócie, w Belgii, zasada reprezentacji nie pozwala na demokrację bezpośrednią, czyli organizacje referendum.” [6]]
Białoruś [2]			$\frac{1}{2}$	
Bułgaria [1]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
Chorwacja [13]		$\frac{1}{2}$		Art. 87 W referendum decyzja powinna być podjęta przez większość biorących udział w referendum.
Czarnogóra [14]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		Art. 37 Decyzja w referendum zostaje podjęta większością głosów obywateli, którzy głosowali, pod warunkiem, że większość obywateli uprawnionych do głosowania zagłosowała.
Dania [15]		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	Art. 42 W referendum oddaje się głosy za i przeciw projektowi ustawy. Dla odrzucenia projektu ustawy, przeciw musi głosować większość wyborców biorących udział w głosowaniu i nie mniej niż trzydzieści procent wszystkich uprawnionych do głosowania. Art. 88 Jeśli większość osób uczestniczących w głosowaniu, a stanowiących co najmniej 40% ogółu uprawnionych do głosowania, wypowie się za uchwalonym przez Folketing projektem ustawy, i gdy uzyska on sankcję królewską, staje się integralną częścią Konstytucji
Estonia [16]		$\frac{1}{2}$		Art. 105 Decyzja narodu podejmowana jest większością głosów osób biorących udział w referendum.
Finlandia [4]				[„W fińskim systemie prawnym referenda nie są wiążące, lecz jedynie konsultacyjne.”]

Grecja [18]	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$	Art. 16 1) Wśród odpowiedzi wyborców, ta, która pokrywa się z większością ważnie oddanych głosów na karcie głosowania, przeważa, czyli jest uznana za wiążącą. 3) Wynik referendum w sprawie o istotnym znaczeniu państwowym lub społecznym jest wiążący w przypadku, gdy co najmniej 40% obywateli zarejestrowanych jako wyborcy zagłosowało. 4) Wynik referendum w sprawie uchwalonej przez Parlament, która reguluje ważne kwestie społeczne jest wiążący, gdy co najmniej 50% obywateli zarejestrowanych jako wyborcy zagłosowało.
Hiszpania [17]		$\frac{1}{2}$	Art. 151 ¹ W drodze referendum absolutną większością wyborców każdej prowincji, na zasadach ustalonych w ustawie organicznej.
Holandia [1]	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	
Irlandia [2]		$\frac{1}{2}$	
Liechtenstein [2, 19]		$\frac{1}{2}$	Art. 66 O przyjęciu lub odrzuceniu ustawy decyduje bezwzględna większość ważnych głosów oddanych w całym państwie.
Litwa [20]		$\frac{3}{4}$	Art. 148 Artykuł 1 Konstytucji, który stanowi, że „Państwo Litewskie jest niepodległą republiką demokratyczną”, może być zmieniony tylko w drodze referendum, jeżeli za zmianą opowie się co najmniej $\frac{3}{4}$ obywateli Litwy mających prawo wyborcze. Art. 151 Konstytucja Republiki Litewskiej wchodzi w życie następnego dnia po urzędowym ogłoszeniu wyników referendum i pod warunkiem, że w referendum zaaprobuje ją więcej niż połowa wszystkich obywateli Republiki Litewskiej, mających prawa wyborcze.
Luksemburg [21]		$\frac{1}{2}$	Art. 114 Zmiana zostaje przyjęta jedynie wtedy, gdy uzyska większość ważnych głosów. Ustawa określa zasady organizowania referendum.

¹Większość musi być uzyskana w każdej prowincji.

Łotwa [22]			<p>Art. 79 Zmianę Konstytucji przekazaną do rozpatrzenia w referendum uznaje się za uchwaloną, jeżeli za zmianą głosowała co najmniej połowa wyborców, którzy mają prawo głosu.</p> <p>Art. 14² Jeśli w referendum za odwołaniem Saeimy zagłosuje większość przy liczbie uczestniczących wynoszącej co najmniej dwie trzecie głosujących w poprzednich wyborach do Saeimy, Saeimę uznaje się za odwołaną.</p> <p>Art. 74² Ustawę uchwaloną przez Saeimę i odroczoną w trybie przewidzianym w art. 72 uznaje się za uchyloną, jeśli liczba osób, które wzięły udział w referendum narodowym stanowi co najmniej połowę liczby wyborców, którzy wzięli udział w ostatnich wyborach do Saeimy i jeżeli większość głosowała za anulowaniem ustawy.</p> <p>Art. 79² Przekazany do rozpatrzenia w referendum projekt ustawy, decyzję o członkostwie Łotwy w Unii Europejskiej lub o istotnych zmianach warunków uczestnictwa w niej, uznaje się za przyjęte, jeżeli liczba głosujących stanowi co najmniej połowę liczby wyborców, którzy wzięli udział w ostatnich wyborach do Saeimy, a większość głosowała za projektem ustawy, za członkostwem Łotwy w Unii Europejskiej lub za istotnymi zmianami warunków uczestnictwa w niej.</p>
Macedonia [23]			<p>Art. 120 Uchwałę o zawarciu sojuszu lub o przystąpieniu do związku z innymi państwami albo o wystąpieniu z nich uważa się za przyjętą, jeżeli w referendum głosowała za nią większość wszystkich wyborców.</p> <p>Art. 74 Decyzję o zmianie granic Republiki uznaje się za przyjętą w referendum, jeżeli głosowała za nią większość wszystkich wyborców.</p>

²Frekwencja liczona jest w inny sposób.

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 73 Decyzję uważa się za przyjętą w referendum, jeżeli głosowała za nią większość wyborców, a w głosowaniu wzięło udział więcej niż połowa wszystkich wyborców.
Malta [24]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 32H Jeśli większość wyborców, głosując w referendum na mocy niniejszej części, zatwierdzi wniosek o uchylenie przepisu, żeby już więcej nie obowiązywał, IHC Prezydent Malty wyda odpowiednie obwieszczenie. Propozycji takiej nie uznaje się za zatwierdzoną jeżeli w głosowaniu głosowało mniej niż 50% plus jeden głos.
Mołdawia [25]		$\frac{1}{2}$	Art. 142 Postanowienia dotyczące suwerennego, niepodległego i jednolitego charakteru państwa, jak również wieczystej neutralności państwa mogą być zmienione jedynie za zgodą udzieloną w referendum, głosami większości obywateli wpisanych na listy wyborcze.
Niemcy [26]		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ Art. 29 Za większość w referendum i referendum konsultacyjnym uznaje się większość oddanych głosów, jeżeli obejmuje ona co najmniej jedną czwartą uprawnionych do udziału w wyborach do Bundestagu.
Norwegia [27]	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	Art. 46 Jeżeli większość członków sporu głosowało za przyjęciem wniosku, musi być on przyjęty. Jeśli większość głosowało przeciwko propozycji, należy ją odrzucić. Jeżeli powyższy warunek nie zostanie spełniony, referendum nie jest wiążące, chyba że co najmniej dwie trzecie legitymowanych wzięło udział w referendum.
Polska [28]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 125 Jeżeli w referendum ogólnokrajowym wzięło udział więcej niż połowa uprawnionych do głosowania, wynik referendum jest wiążący. Art. 235 Zmiana Konstytucji zostaje przyjęta, jeżeli za tą zmianą opowiedziała się większość głosujących.
Portugalia [2, 29]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 115 Referendum jest rozstrzygające wyłącznie wtedy, gdy liczba głosujących jest większa od połowy liczby ujętych w spisie wyborców.

Rosja [30]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 135 W przypadku przeprowadzenia głosowania ogólnonarodowego Konstytucję Federacji Rosyjskiej uważa się za przyjętą, jeśli głosowało za nią więcej niż połowa wyborców biorących udział w głosowaniu, pod warunkiem, że w głosowaniu wzięło udział więcej niż połowa wyborców.
Rumunia [2]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
San Marino [7]		$\frac{1}{2}$	$\frac{32}{100}$
Serbia [3]			$\frac{1}{2}$
Słowacja [31]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 98 Wyniki referendum są wiążące, jeżeli uczestniczyła w nim ponad połowa uprawnionych wyborców i gdy rozstrzygnięcie zostało przyjęte przez ponad połowę uczestniczących w referendum.
Słowenia [32]		$\frac{1}{2}$	Art. 90 — Referendum ustawodawcze Propozycję uważa się za przyjętą, jeśli opowie się za nią większość wyborców uczestniczących w referendum.
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 170 Zmianę Konstytucji uznaje się za przyjętą, jeśli uzyska większość oddanych głosów, a w referendum weźmie udział większość wszystkich wyborców.
Szwajcaria [33]			Naród szwajcarski i kantony Zurych, Berno, Lucerna, Uri, Szwyz, Obwalden i Nidwalden, Glarus, Zug, Freiburg, Solura, Bazylea—miasto i Bazylea—okręg, Szafuza, Appenzell—Ausserrhoden i Appenzell-Innerrhoden, St. Gallen, Gryzonia, Argowia, Turgowia, Tessin, Waadt, Wallis, Neuenburg, Genewa i Jura tworzą Konfederację Szwajcarską. Art. 142 <ul style="list-style-type: none"> • Projekty przedstawione narodowi pod głosowanie zostają przyjęte, jeżeli wypowiada się za tym większość głosujących. • Projekty przedstawione narodowi i kantonom pod głosowanie zostają przyjęte, jeżeli wypowie się za tym większość głosujących i większość kantonów. • Wynik głosowania ludowego w kantonie oznacza głos tego kantonu.

				<ul style="list-style-type: none"> • Kantony Obwalden, Nidwalden, Bazylea—miasto, Bazylea—okolica, Appenzell—Ausserrhoden i Appenzell—Innerrhoden mają po połowie głosu.
Szwecja [34]		$\frac{1}{2}$		Art. 16 Inicjatywa zostaje odrzucona, jeżeli więcej niż połowa osób uczestniczących w wyborach, które oddały głosy ważne, była jej przeciwna.
Turcja [35]		$\frac{1}{2}$		Art. 175 Ustawy o zmianie Konstytucji, które są poddawane pod referendum, w celu ich zatwierdzenia wymagają uzyskania ponad połowy ważnie oddanych głosów.(...) W celu zapewnienia frekwencji w referendach, powszechnych i uzupełniających wyborach parlamentarnych oraz w wyborach lokalnych, stosuje się wszelkie konieczne środki, nie wyłączając kar pieniężnych.
Ukraina [36]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		Art. 41 Projekt ustawy lub uchwały uważa się za zatwierdzony, jeśli więcej niż 50% obywateli, którzy wzięli udział w referendum głosowało za tą ustawą lub uchwałą. Referendum nie będzie uznane za wiążące, jeżeli mniej niż 50% obywateli znajdujących się na liście wyborców wzięło udział w głosowaniu. (...) referendum w sprawie przedterminowego rozwiązania Najwyższej Rady Ukrainy i prezydenta Ukrainy nie będzie uznane za wiążące, jeżeli mniej niż dwie trzecie obywateli znajdujących się na liście wyborców wzięło udział w nim.
Węgry [37]		$\frac{1}{2}$		Art. 8 Referendum ogólnokrajowe jest ważne, jeśli ponad połowa głosujących oddała ważne głosy i jest wiążące, jeśli ponad połowa z głosujących udzieliła identycznej odpowiedzi na sformułowane w referendum pytanie.
Wielka Brytania [5, 38, 39]		$\frac{1}{2}$		Art. 8 [38] Minister może wydać nakaz wprowadzenia w życie „alternatywnego systemu głosowania”, jeśli więcej głosujących w referendum jest za odpowiedzią „Tak”, niż za odpowiedzią „Nie”.
		$\frac{1}{2}$	$\frac{40}{100}$	[5]

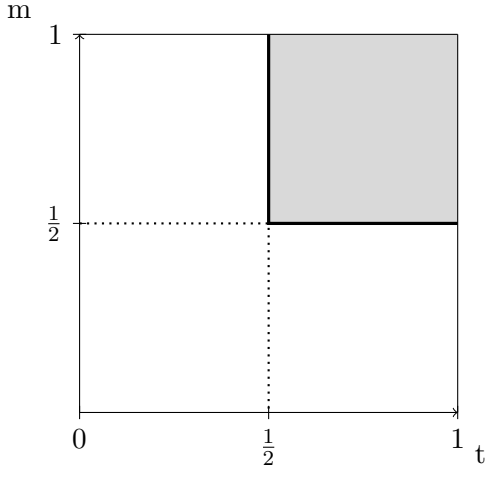
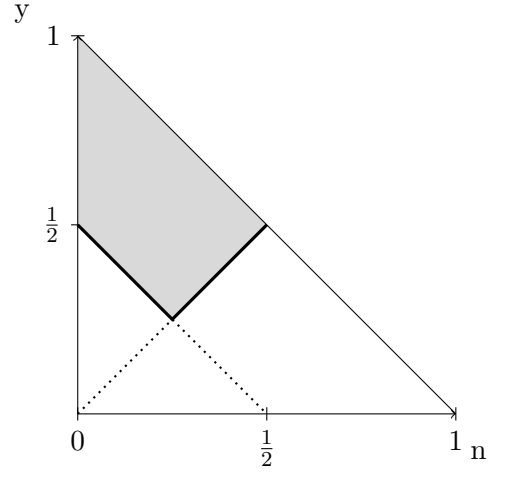
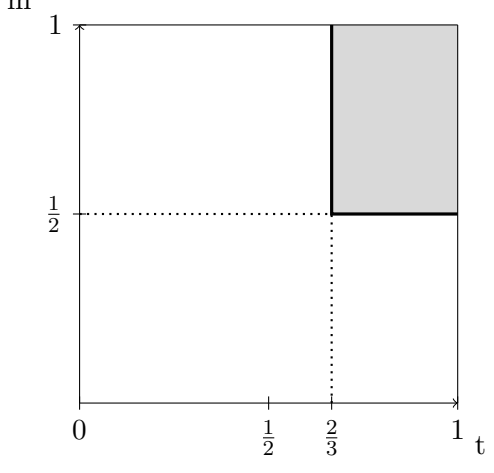
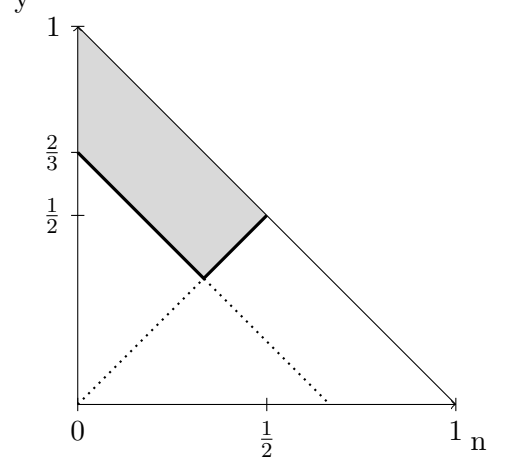
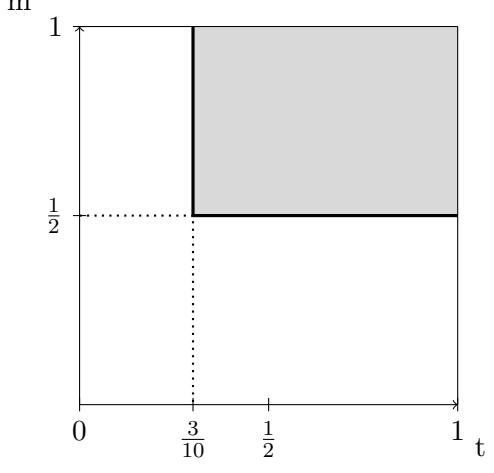
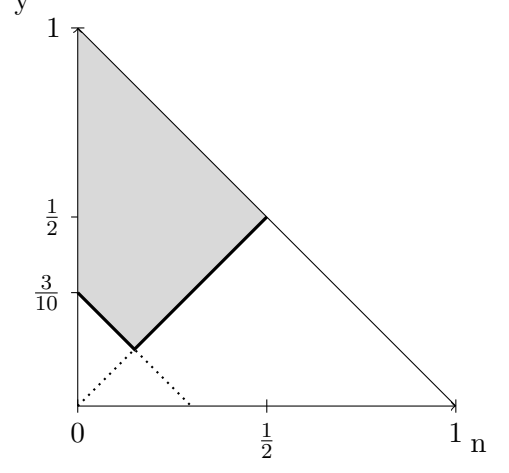
		$\frac{1}{2}$	Art. 103 [39] Jeżeli większość głosujących w referendum zagłosuje za wejściem w życie the Assembly Act provisions ma ona wejść w życie zgodnie z § 105. [Reguły są ustalane każdorazowo.]
Włochy [40]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Art. 75 Wniosek poddany pod referendum zostaje przyjęty, jeżeli w głosowaniu wzięła udział większość posiadających do tego prawo oraz jeżeli uzyskał on większość ważnie oddanych głosów.

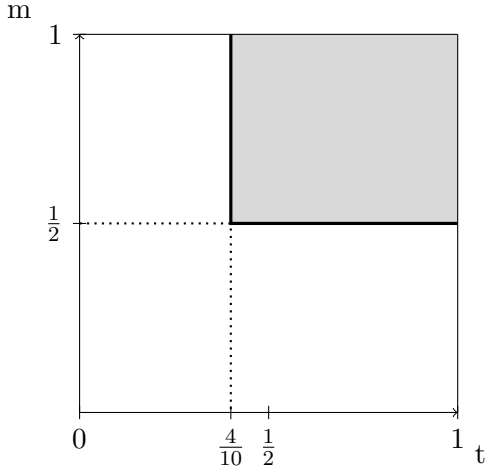
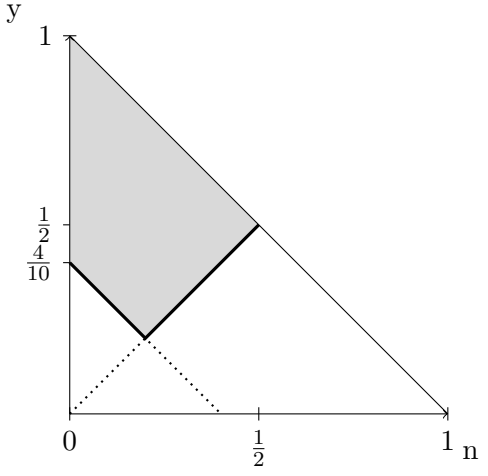
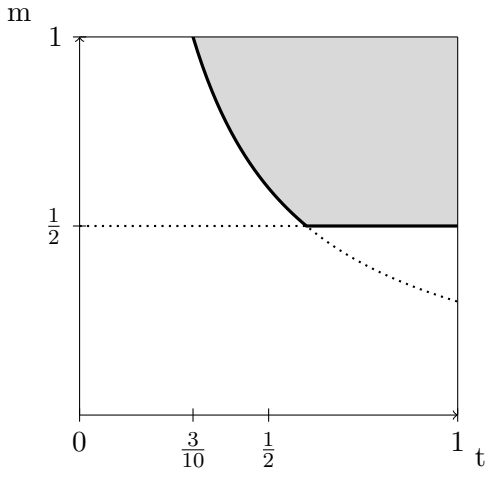
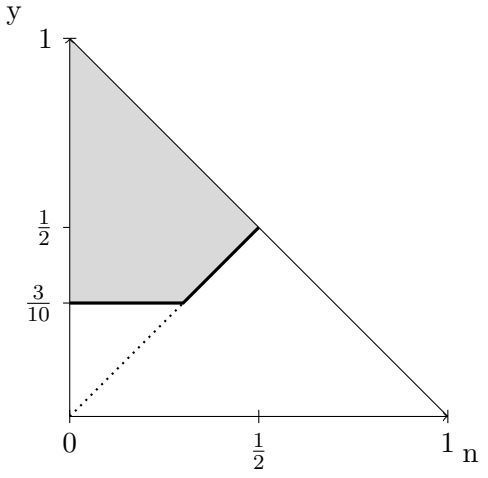
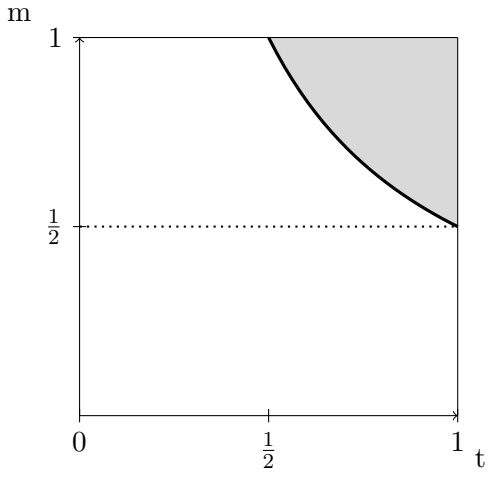
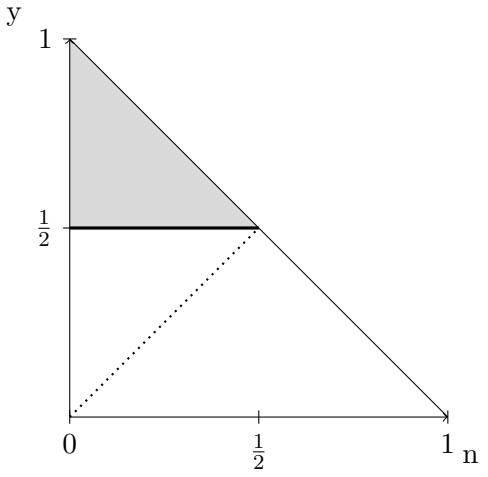
Tabela 2.1: Progi frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak oraz fragmenty aktów prawnych wybranych krajów europejskich.

2.2 Wykresy zbiorów wygrywających

Rozdział ten przedstawia wykresy zależności m od t oraz y od n dla zdefiniowanych w przepisach wybranych krajów europejskich progów frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak, przedstawione są również zbiory wygrywające. Dla niektórych krajów wyniki leżące na dolnym brzegu zbioru wygrywającego dają wynik pozytywny, a dla innych negatywny. Tabela 2.2 przedstawia takie wykresy zależności m od t oraz wykresy zależności y od n (sposób, w jaki jeden wykres można przekształcić w drugi omówiony jest na str. 8) dla progów przedstawionych w Tabeli 2.1.

T	M	Y	Wykres zależności m od t	Wykres zależności y od n
	$\frac{1}{2}$			

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$		

	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$		
	$\frac{1}{2}$			

		$\frac{3}{4}$		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		

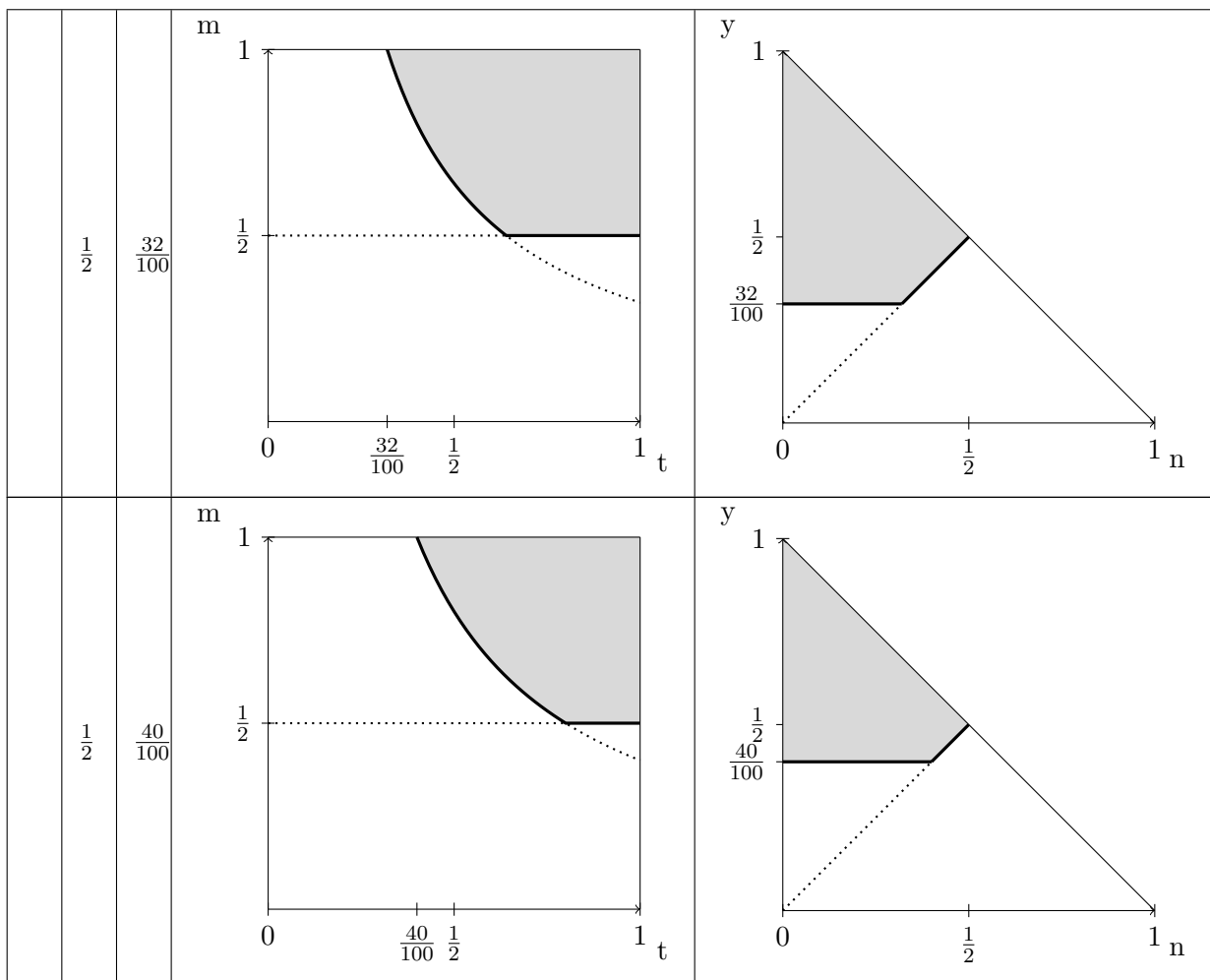


Tabela 2.2: Wykresy dla poszczególnych progów frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak.

Wpływ zmiany decyzji pojedynczego wyborcy negatywnego na rezultat referendum

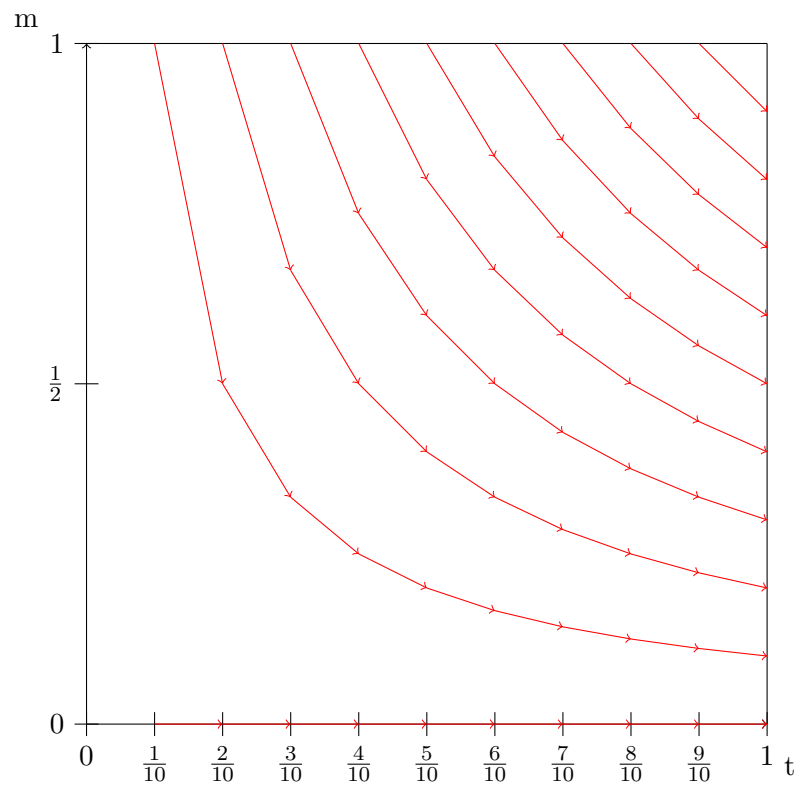
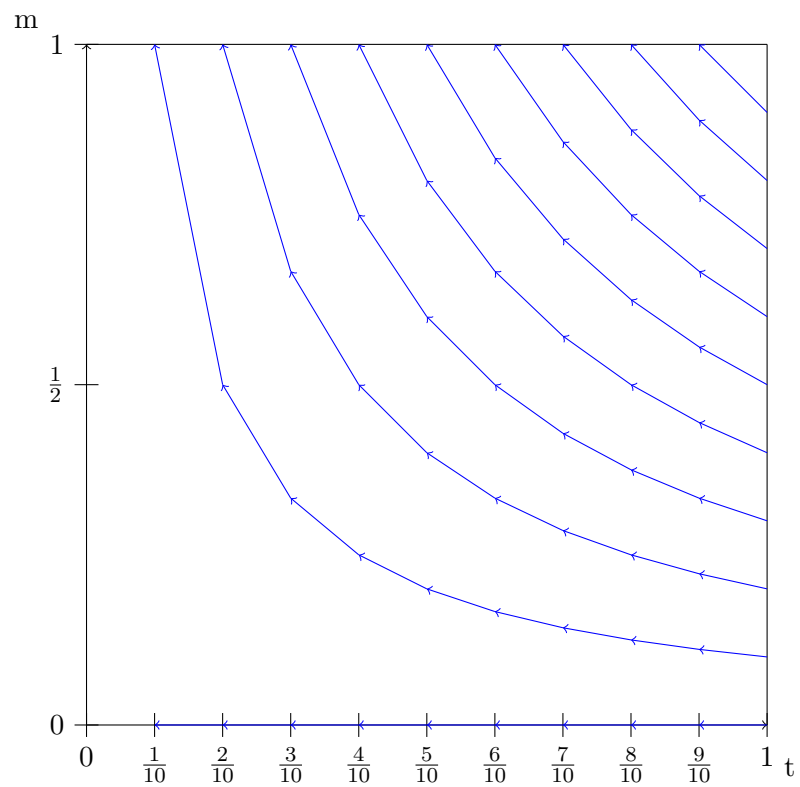
W rozdziale tym opiszemy, jak mogłyby zmienić się wyniki referendum, jeśli jeden z wyborców negatywnych zmieniłby swoją decyzję albo ze wstrzymania się od głosu (nie wzięcia udziału w wyborach) na głosowanie na nie, bądź też na odwrót. Dla uproszczenia zapisu wybraliśmy jeden sposób prezentacji wyniku referendum i od tej pory, pracować będziemy we współrzędnych t i m , czyli na kwadracie $[0, 1]^2$. Dlatego też wynik referendum będziemy oznaczać przez parę (t, m) , a nie przez trójkę (t, m, y) . Wszystkie oznaczenia, które stosowane będą poniżej zostały wprowadzone na str. 6.

3.1 Sytuacja ogólna

Niech punkt $P_0 = (t, m)$ odpowiada wynikom wyborów z frekwencją równą $t \in \{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1\}$ i stosunkiem liczby głosów na tak do liczby wszystkich oddanych głosów m . Przez k oznaczamy liczbę osób uprawnionych do głosowania. Punkt $P_1 = (t + \frac{1}{k}, \frac{mt}{t+1/k})$ (dla $t \in [\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$) odpowiada wynikom wyborów, w których jeden wyborca negatywny zmienił decyzję ze wstrzymania się od głosu na głos na nie, a punkt $P_2 = (t - \frac{1}{k}, \frac{mt}{t-1/k})$ (dla $t \in [\frac{2}{k}, 1]$) odpowiada wynikom wyborów, w których inny wyborca negatywny zmienił głos na nie na wstrzymanie się od głosu. Zauważmy, że punkt P_2 reprezentuje możliwy wynik głosowania, gdy dodatkowo $k_n \geq 1$, czyli

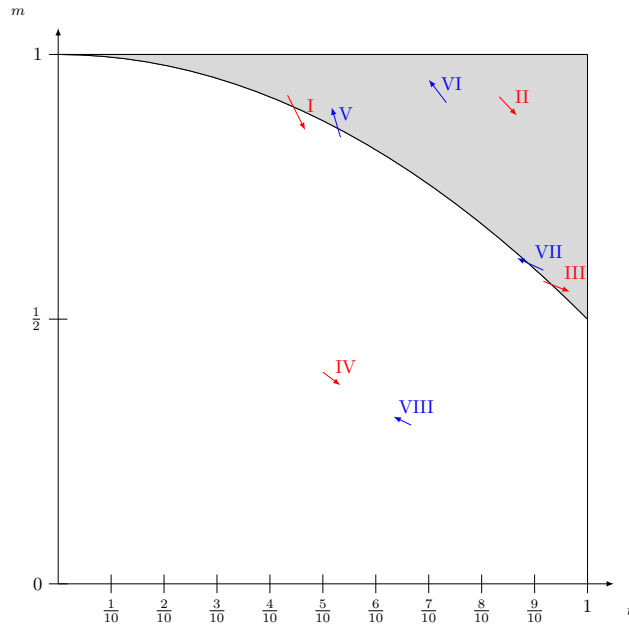
$$m \leq \frac{t - 1/k}{t}.$$

Wektory wskazujące zmianę stanu początkowego mają współrzędne $\overrightarrow{P_0P_1} = (\frac{1}{k}, \frac{-m}{tk+1})$ oraz $\overrightarrow{P_0P_2} = (-\frac{1}{k}, \frac{m}{tk-1})$. Tangensy kąta nachylenia tych wektorów do osi poziomej są równe $\frac{-m}{t+1/k}$ i $\frac{-m}{t-1/k}$ odpowiednio dla $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_0P_2}$. Dla dużych wartości k te tangensy są więc w przybliżeniu równe i wynoszą $\frac{-m}{t}$. Poniżej przedstawimy wszystkie możliwe wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ (Rys. 3.1) i $\overrightarrow{P_0P_2}$ (Rys. 3.2) dla $k = 10$. Od tej pory na wykresach kolorem czerwonym oznaczane będą wektory $\overrightarrow{P_0P_1}$, a niebieskim wektory $\overrightarrow{P_0P_2}$.

Rysunek 3.1: Wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ dla $k = 10$.Rysunek 3.2: Wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_2}$ dla $k = 10$.

3.2 Sytuacje pożądane i niechciane

W tym rozdziale przedstawimy, które zmiany wyniku referendum są „dobre” z naszego punktu widzenia. Poniższy rysunek przedstawi wszystkie możliwe typy zmiany wyniku.



Rysunek 3.3: Wszystkie możliwe typy zmiany wyniku.

Zauważmy, że w sytuacjach II, IV, VI i VIII wyborca negatywny nie ma wpływu na rezultat referendum, czyli zmiana jego głosu zachowa rezultat (gdy był on pozytywny, pozostanie pozytywny, a w przypadku negatywnego rezultatu, nadal pozostanie on negatywny). Pozostałe sytuacje powodują zmianę rezultatu referendum, wyborca negatywny jest wtedy decydujący (ang. *pivotal*). Z naszego punktu widzenia dwie z nich są dobre (I i V) — mobilizują do pójścia na wybory, a dwie złe (III i VII) — zachęcają, żeby z nich zrezygnować. W sytuacji I wyborca negatywny idąc na wybory zmienia na swoją korzyść rezultat referendum, a w sytuacji V wstrzymując się od głosu doprowadza do pozytywnego rezultatu (czyli wyborca będzie wołał zagłosować, żeby uniknąć takiej zmiany). Natomiast w przypadku III i VII dla wyborcy negatywnego bardziej korzystne będzie niepójście na referendum, gdyż wtedy zmieni on rezultat na swoją korzyść, a głosując uzyska pozytywny rezultat, którego chciał uniknąć. Sytuacje, w których wyborca nie będzie miał wpływu na rezultat (II, IV, VI i VIII) zdarzają się w każdym systemie referendalnym (szczególnie, gdy jest dużo osób uprawnionych do głosowania). Chcemy więc znaleźć taki model, gdzie wyborca negatywny będzie miał motyw, by pójść oddać głos. W szczególności, wstrzymanie się od głosu, chociaż czasem nie wpłynie na wynik, to jednak nigdy nie przyniesie mu korzyści.

3.3 Wektory zmiany decyzji wyborcy negatywnego dla referendów europejskich

W Tabeli 3.1 przedstawimy, jak wyglądają wektory zmiany decyzji pojedynczego wyborcy negatywnego, gdy P_0 jest na dolnym brzegu zbioru wygrywającego, dla przykładów referendów

w krajach europejskich. Chcemy zaobserwować, w których systemach referendalnych wyborca negatywny może w „dobry” sposób wpłynąć na rezultat, a w których te „złe” zmiany są też możliwe¹. Czerwone odcinki to wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$, a niebieskie — $\overrightarrow{P_0P_2}$.

T	M	Y	Kraje	Wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_0P_2}$ dla punktów na dolnym brzegu
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		Bułgaria, Czarnogóra, Grecja, Łotwa, Macedonia, Malta, Polska, Portugalia, Rosja, Rumunia, Słowacja, Słowenia, Ukraina, Włochy	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$		Łotwa, Norwegia, Ukraina	

¹W Rozdziale 3.2 opisujemy, które sytuacje są „dobre”, a które „złe”.

$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	<p>Holandia</p>	
$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}$	<p>Grecja</p>	
	$\frac{1}{2}$	<p>Andora, Chorwacja, Estonia, Hiszpania, Irlandia, Liechtenstein, Luksemburg, Słowenia, Szwecja, Turcja, Węgry, Wielka Brytania</p>	

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	Albania	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Niemcy	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{32}{100}$	San Marino	

	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	Dania	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{40}{100}$	Dania, Wielka Brytania	
		$\frac{1}{2}$	Austria, Białoruś, Litwa, Łotwa, Macedonia, Mołdawia, Serbia	

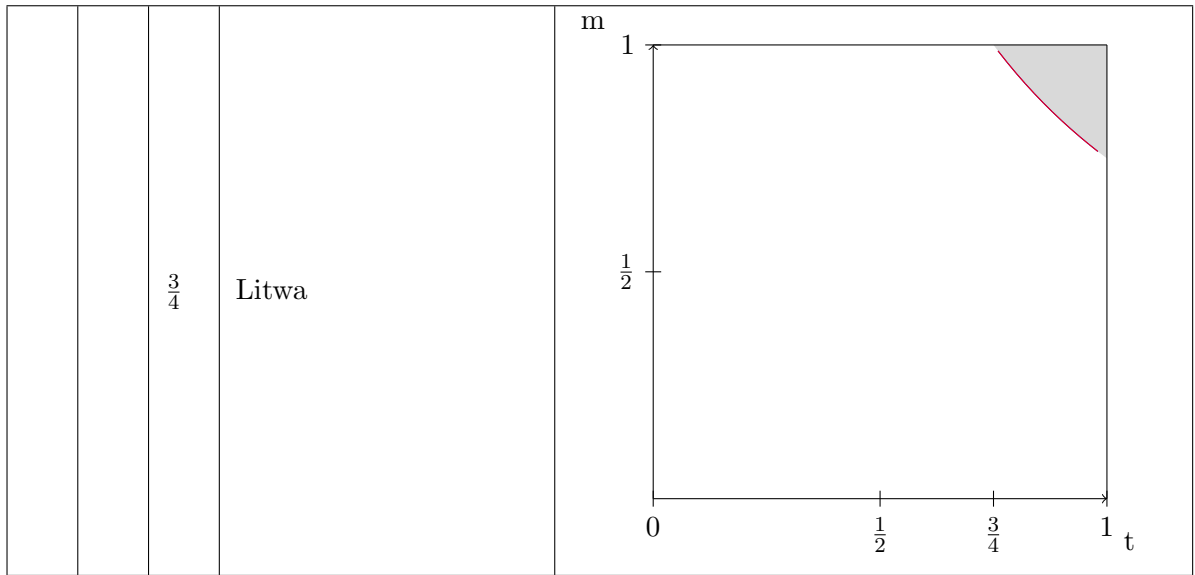


Tabela 3.1: Wykresy dla poszczególnych progów frekwencji, większości kwalifikowanej i głosów na tak dla $k = 50$.

Na podstawie powyższej tabeli można zauważyć, że dla systemów referendalnych, w których ustalone są progi T i M , dla wyników znajdujących się na odcinku $\{T\} \times [\frac{1}{2}, 1]$, zmiana głosu pojedynczego wyborcy negatywnego z głosowania na nie na wstrzymanie się od głosu zmienia pozytywny rezultat wyborów na negatywny, a w przypadku, gdy inny wyborca zdecyduje się głosować przeciw propozycji może doprowadzić on do niekorzystnej dla siebie zmiany, czyli odpowiada to sytuacjom VII i III z Rys. 3.2. Stąd w takim systemie wyborca negatywny nie zawsze ma motywację, by iść na referendum. W przypadku, gdy ustalony jest jedynie próg M , to dla każdego wyniku z dolnego brzegu zmiana z głosu przeciw propozycji na wstrzymujący zmieni negatywny rezultat na pozytywny, a przeciwna zmiana głosu doprowadzi do zmiany odwrotnej. W tym przypadku mamy do czynienia jedynie z możliwością „dobrych” zmian, lecz możliwość przegłosowania propozycji przez pojedynczą osobę nie wydaje się być sprawiedliwa. Gdy ustalone progi to M i Y , dla niektórych wyników z dolnego brzegu (dla tych, które nie leżą na odcinku $[2Y, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$) głos wyborcy negatywnego nie ma wpływu na rezultat wyborów, a dla innych wyników (gdy frekwencja jest wysoka) pójście na referendum jest dla niego korzystne. W tym przypadku, jeśli sondaże przewidują niską frekwencję, to wyborca negatywny nie ma nadziei, że jego głos może mieć wpływ na rezultat. W ostatnim systemie, w którym podany jest jedynie próg Y , pojedynczy wyborca nie ma wpływu na rezultat przy wysokiej frekwencji. Próg Y wyznacza dodatkowo konieczność wysokiej frekwencji (50% lub nawet 75%), więc wyborca negatywny raczej wybierze wstrzymanie się od głosu.

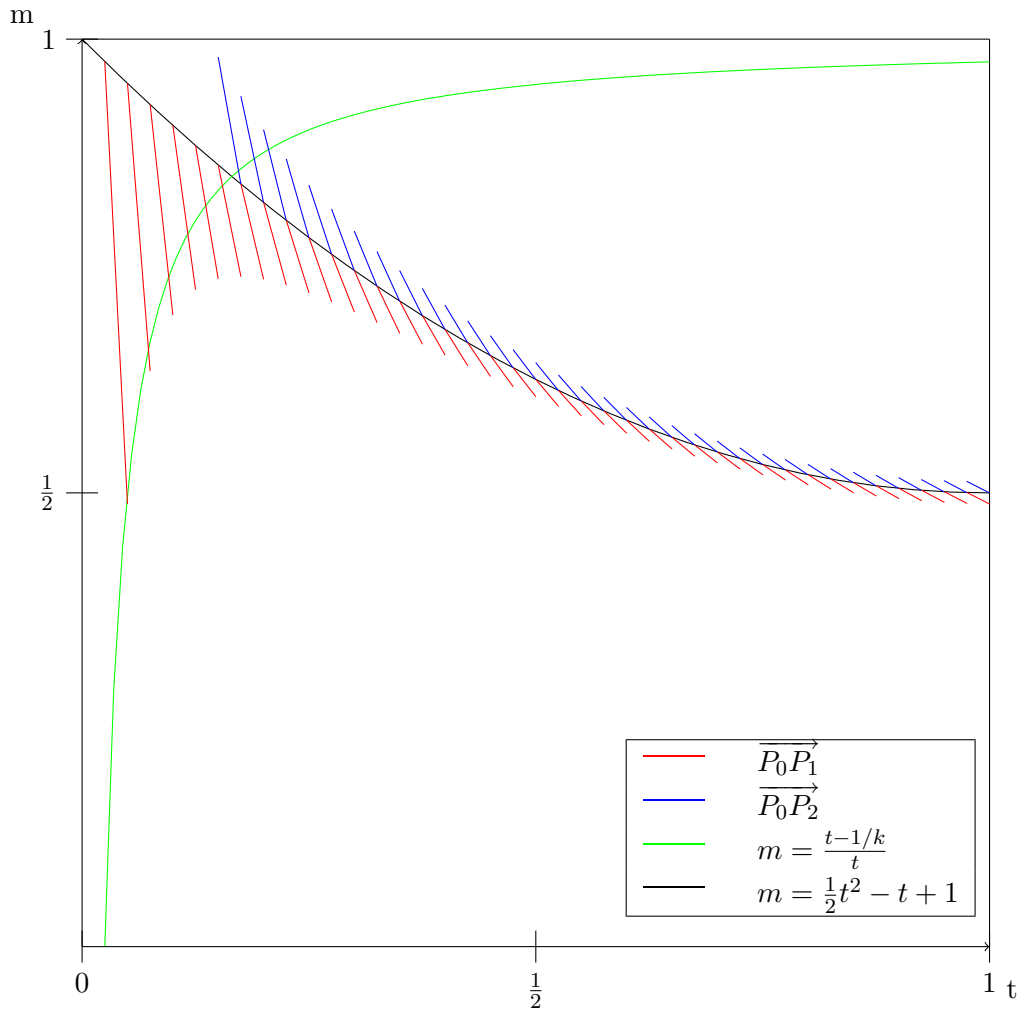
Reasumując, w systemach referendalnych stosowanych w Europie nie znajdziemy takiego, który zawsze zachęca wyborcę negatywnego do głosowania. Częściej łatwiejszym sposobem uzyskania korzystnego dlań rezultatu będzie niepójście na referendum. Z tego powodu analizować będziemy rodzinę modeli, w których próg większości kwalifikowanej wyznacza funkcja kwadratowa M_a , w nadziei, że znajdziemy model, gdzie każdy wyborca idąc na referendum ma szansę zmiany rezultatu na swoją korzyść.

3.4 Wektory zmiany decyzji wyborcy negatywnego w modelu M_a

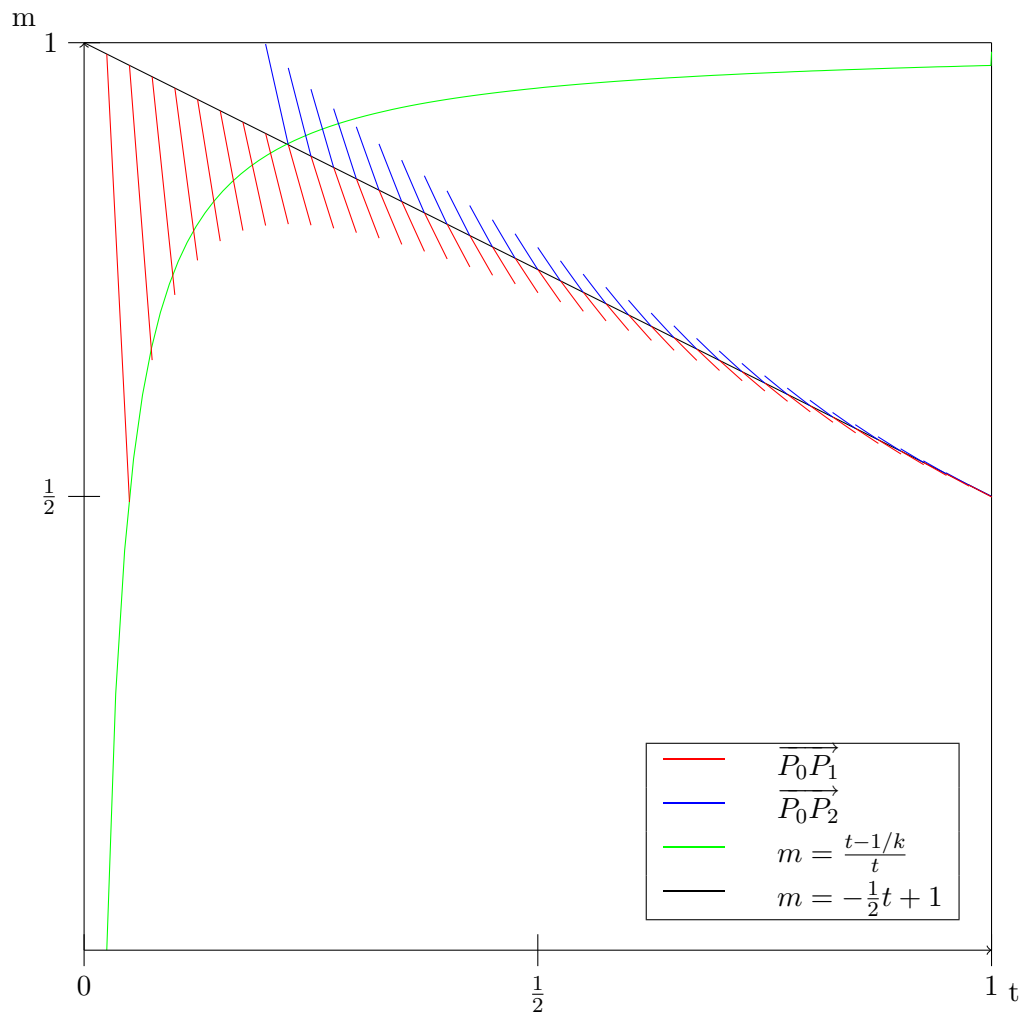
Na początku przeanalizujemy sytuację, gdzie P_0 będzie znajdować się dokładnie na dolnym brzegu zbioru wygrywającego, ponieważ pojedynczy wyborca ma szansę zmienić rezultat referendum jedynie wtedy, gdy jego wynik jest blisko progu M . Następnie sprawdzimy decyzyjność pojedynczego wyborcy dla wszystkich wyników w zależności od przyjętego parametru.

3.4.1 Wynik na dolnym brzegu zbioru wygrywającego

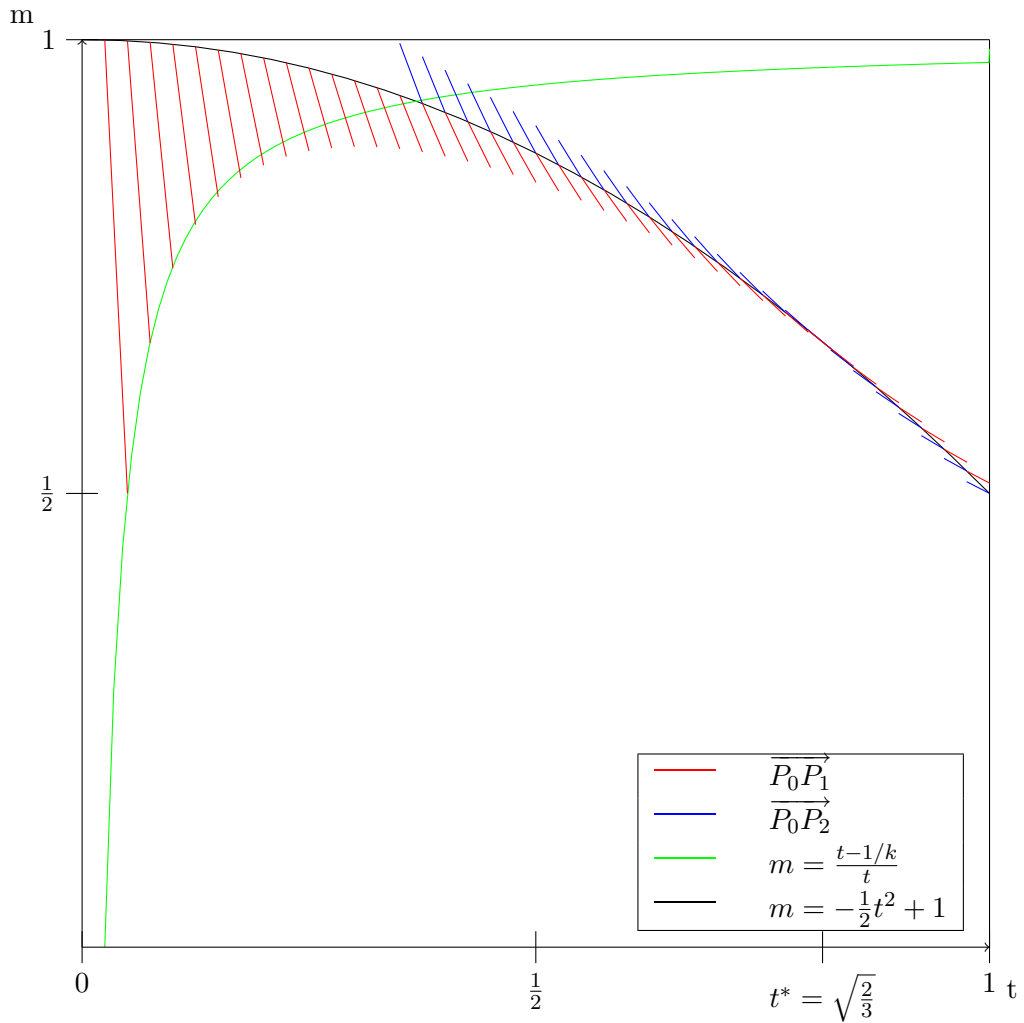
Poniższe wykresy przedstawiają wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_0P_2}$ przy $k = 40$ dla punktów $P_0 = (t, M_a(t))$ (gdzie $t \in \{0.025, 0.05, \dots, 0.975, 1\}$) odpowiednio dla $a = \frac{1}{2}$ (Rys. 3.4), $a = 0$ (Rys. 3.5) oraz $a = -\frac{1}{2}$ (Rys. 3.6). Na wykresach zielona linia oddziela wyniki, które mogą być początkiem wektora $\overrightarrow{P_0P_2}$ od pozostałych (patrz str. 22). Te przykładowe wykresy mają dać nam intuicję, jak pojedynczy wyborca negatywny może zmienić wynik referendum znajdujący się na dolnym brzegu zbioru wygrywającego.



Rysunek 3.4: Wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ dla $P_0 = (t, M_a(t))$, $t \in \{0.025, 0.05, \dots, 0.975, 1\}$, $k = 40$ oraz $a = \frac{1}{2}$.



Rysunek 3.5: Wektory postaci $\overrightarrow{P_0 P_1}$ dla $P_0 = (t, M_a(t))$, $t \in \{0.025, 0.05, \dots, 0.975, 1\}$, $k = 40$ oraz $a = 0$.



Rysunek 3.6: Wektory postaci $\overrightarrow{P_0P_1}$ dla $P_0 = (t, M_a(t))$, $t \in \{0.025, 0.05, \dots, 0.975, 1\}$, $k = 40$ oraz $a = -\frac{1}{2}$.

Podsumowując, w analizowanym modelu referendum i przy wynikach z dolnego brzegu zbioru wygrywającego, w przypadku $a \in [0, \frac{1}{2}]$, wyborca negatywny jedynie idąc na wybory może zmienić rezultat na swoją korzyść, lecz gdy $a = 0$, to przy pełnej frekwencji jego głos nie ma znaczenia, czyli jeśli $\frac{k_y}{1-1/k} \geq M_0(1 - 1/k)$, to $\frac{k_y}{1} \geq M_0(1)$, ponieważ

$$k_y \geq \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k} + 1\right) \frac{k-1}{k} = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{k^2-1}{2k^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2} > \frac{1}{2},$$

bo $\frac{1}{2k^2} > 0$. Natomiast dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ można znaleźć takie wyniki referendum leżące na tym brzegu, dla których zmiana głosu wyborcy negatywnego z głosowania na niepójście, zmieni rezultat referendum na korzyść tego wyborcy.

Dla analizowanej rodziny funkcji $M_a : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ ($a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) danych wzorem $M_a(t) = at^2 - (a + \frac{1}{2})t + 1$ tangens kąta nachylenia osi poziomej do stycznej do paraboli w punkcie $(t, M_a(t))$ wynosi: $M'_a(t) = 2at - (a + \frac{1}{2})$ dla $t \in [0, 1]$.

Przeanalizujemy sytuację, gdy wartości k są duże, zaś wynik referendum opisany jest przez punkt leżący dokładnie na wykresie funkcji M_a . Zauważmy, że w rzeczywistości taki wynik wyborów jest bardzo mało prawdopodobny (ponieważ zbiór wyników nie jest równy całemu kwadratowi $[0, 1]^2$), ale dla dużych wartości k znajdziemy wyniki leżące blisko dolnego brzegu zbioru wygrywającego. Analiza tej sytuacji nie da więc nam pewności, czy takie zmiany w rzeczywistości mogą mieć miejsce, ale pozwoli nam przypuszczać na podstawie hipotezy, że tak faktycznie jest. W kolejnym podrozdziale przedstawimy zbiory wyników, dla których dana sytuacja (I — VIII) ma miejsce.

Dla przypomnienia: tangens kąta nachylenia osi poziomej do wektorów $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_0P_2}$ dąży do $\frac{-m}{t}$, gdy $k \rightarrow \infty$.

Gdy

$$M'_a(t) > \frac{-M_a(t)}{t},$$

to kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji M_a do osi poziomej w punkcie $(t, M_a(t))$ jest większy niż wektorów $\overrightarrow{P_0P_1}$ i $\overrightarrow{P_0P_2}$. Stąd wyborca, zmieniając swój głos ze wstrzymującego na głos na nie, zmieni rezultat wyborów na swoją korzyść, a zmieniając swój głos z nie na wstrzymanie, zachowa pozytywny rezultat referendum, czyli zmiana będzie dobra, bo zachęci do pójścia na wybory. Gdy

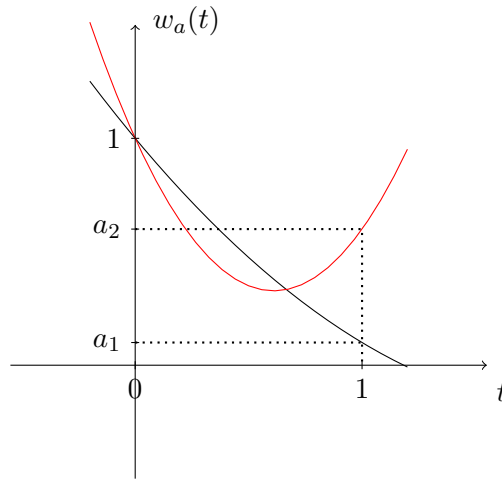
$$M'_a(t) = \frac{-M_a(t)}{t},$$

to punkty P_1 i P_2 także będą leżeć na wykresie funkcji M_a , więc wyborca, zarówno zmieniając swój głos ze wstrzymującego na głos przeciw propozycji referendum, jak i dokonując odwrotnej zmiany, nie wpłynie na rezultat referendum. W trzecim przypadku, gdy

$$M'_a(t) < \frac{-M_a(t)}{t},$$

to dla wyborcy negatywnego głosowanie przeciwko propozycji nie jest korzystne — zmieniając swoją decyzję z głosu wstrzymującego na głos na nie, zachowa pozytywny wynik referendum, a nie idąc na wybory może korzystnie (dla siebie) zmienić ich rezultat.

Analizując znak wyrażenia $M'_a(t) - \frac{-M_a(t)}{t}$ w zależności od a dowiemy się więc, z jaką sytuacją dla każdego t mamy do czynienia. Ponieważ znak trójmianu kwadratowego $w_a(t) := 3at^2 - (2a+1)t + 1$ jest taki sam jak powyższego wyrażenia dla każdego $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ oraz $t \in [0, 1]$, to sprawdzimy teraz dla poszczególnych wartości parametru a , dla jakich t wyrażenie $w_a(t)$ jest dodatnie. Rozważymy trzy przypadki:

1. $a \in (0, \frac{1}{2}]$ Rysunek 3.7: Wykresy funkcji w_a dla $a_1 = \frac{1}{10}$ i $a_2 = \frac{6}{10}$

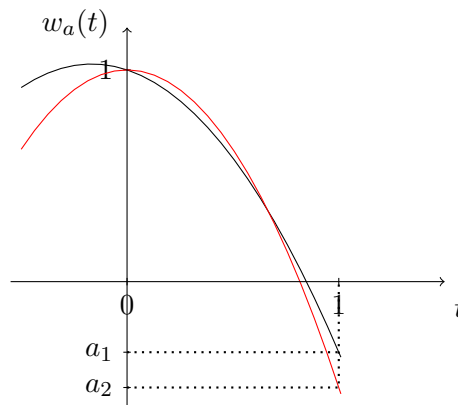
Ramiona paraboli zwrócone są do góry, dla $t = 0$ oraz $t = 1$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $(\frac{2a+1}{6a}, -\frac{4a^2-8a+1}{12a})$. Stąd dla $a \in (0, \frac{1}{4}]$, $w_a(t) > 0$ dla każdego $t \in [0, 1]$ (ponieważ $\frac{2a+1}{6a} \geq 1$). Również dla $a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ mamy $w(t) > 0$ dla każdego $t \in [0, 1]$ (ponieważ $\frac{2a+1}{6a} \in (0, 1)$ i $-\frac{4a^2-8a+1}{12a} > 0$ dla takich a). Podsumowując, dla $a \in (0, \frac{1}{2}]$ oraz $t \in [0, 1]$ mamy

$$M'_a(t) > \frac{-M_a(t)}{t}.$$

2. $a = 0$ — funkcja w przyjmuje postać $w(t) = -t + 1$, więc

$$M'_a(t) > \frac{-M_a(t)}{t}, \quad t \in [0, 1),$$

$$M'_a(1) = \frac{-M_a(1)}{1}.$$

3. $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ Rysunek 3.8: Wykresy funkcji w_a dla $a_1 = -\frac{1}{3}$ i $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Ramiona paraboli zwrócone są do dołu, dla $t = 0$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla $t = 1$ ujemne. Wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $(\frac{2a+1}{6a}, -\frac{4a^2-8a+1}{12a})$, zaś $\frac{2a+1}{6a} \leq 0$ dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$, więc istnieje dokładnie jedno takie $t^* \in (0, 1)$, że

$$M'_a(t^*) = \frac{-M_a(t^*)}{t^*}.$$

Ponadto

$$M'_a(t) > \frac{-M_a(t)}{t}, \quad t \in [0, t^*),$$

$$M'_a(t) < \frac{-M_a(t)}{t}, \quad t \in (t^*, 1].$$

Wyznamy teraz t^* . Sprawdźmy, czy równanie

$$3at^2 - (2a + 1)t + 1 = 0.$$

ma miejsca zerowe. Obliczamy $\Delta = 4a^2 + 4a + 1 - 12a = 4a^2 - 8a + 1$ stwierdzając, że dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ mamy $\Delta > 0$, a zatem funkcja w_a ma dwa miejsca zerowe:

$$t_1 = \frac{2a + 1 - \sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{6a} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{6a}.$$

Następnie trzeba sprawdzić, które z tych rozwiązań mieści się w przedziale $[0, 1]$. Od razu można zauważyć, że dla a z przedziału $[-\frac{1}{2}, 0)$ pierwiastek t_2 jest ujemny, ponieważ $2a + 1 + \sqrt{4a^2 - 8a + 1} > 0$ i $6a < 0$. Pokażemy teraz, że $t_1 \in [0, 1]$. Przypuśćmy najpierw, że $\frac{2a+1-\sqrt{4a^2-8a+1}}{6a} < 0$, czyli

$$2a + 1 - \sqrt{4a^2 - 8a + 1} > 0,$$

$$2a + 1 > \sqrt{4a^2 - 8a + 1}.$$

Ponieważ obydwie strony nierówności są nieujemne, więc możemy obustronnie podnieść je do kwadratu. Wówczas mamy

$$4a^2 + 4a + 1 > 4a^2 - 8a + 1,$$

$$a > 0$$

co daje sprzeczność.

Pokażemy teraz, że $t_1 < 1$. Załóżmy, że $\frac{2a+1-\sqrt{4a^2-8a+1}}{6a} > 1$. Stąd dostajemy

$$2a + 1 - \sqrt{4a^2 - 8a + 1} < 6a,$$

$$1 - 4a < \sqrt{4a^2 - 8a + 1}.$$

Obydwie strony możemy podnieść do kwadratu, gdyż są one nieujemne, czyli

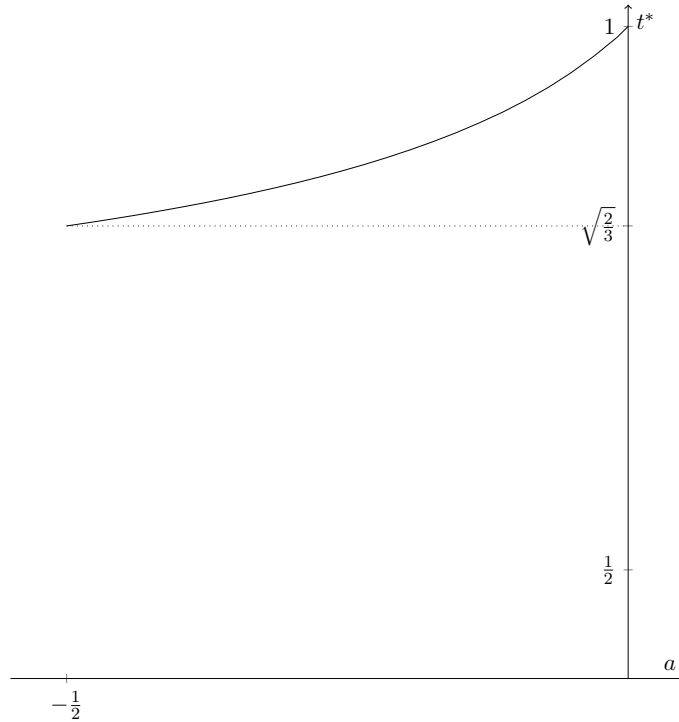
$$1 - 8a + 16a^2 < 4a^2 - 8a + 1,$$

$$a^2 < 0,$$

co znów daje sprzeczność. Stąd

$$t^* = \frac{1}{3} + \frac{1 - \sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{6a}. \quad (3.1)$$

Poniższy wykres przedstawia, jak zmienia się wartość t^* w zależności od parametru a .



Rysunek 3.9: Wykres zależności t^* od $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$.

Powyższe obliczenia dają nam wskazówkę, jaki wpływ może mieć zmiana decyzji pojedynczego wyborcy negatywnego na rezultat referendum. Przypuszczamy, że dla $a \geq 0$ będzie mógł on doprowadzić tylko do „dobrej” zmiany, czyli głosując mógłby zmienić rezultat na swoją korzyść, a gdyby nie poszedł, ewentualna zmiana rezultatu nie byłaby przez niego pożądana. Natomiast w modelu, gdzie $a < 0$, przy wysokiej frekwencji, większej od t^* , pójście na wybory na pewno nie przyniesie mu zysku (w takiej sytuacji może on jedynie nie mieć wpływu na rezultat albo zmienić go na swoją niekorzyść).

3.4.2 Wszystkie wyniki

W tym rozdziale przedstawimy twierdzenia opisujące zbiory wyników, dla których pojedynczy wyborca negatywny będzie miał wpływ na rezultat referendum. Dla $a \geq 0$ będzie on mógł zmienić rezultat jedynie w pożądanym przez nas sposób. Natomiast dla ujemnego a będą też takie sytuacje, w których wyborca negatywny, głosując, zmieni rezultat referendum na niekorzystny dla siebie.

1. $a = 0$

Poniższe twierdzenie pokazuje, że gdy referendum przynosi rezultat pozytywny, to zmiana decyzji pojedynczego wyborcy negatywnego z głosowania na brak udziału w wyborach, nie zmieni rezultatu referendum (sytuacja VI na Rys. 3.2), a gdy rezultat jest negatywny bez głosu pojedynczego z wyborców negatywnych, to decydując się na głosowanie na nie, zachowa on wynik negatywny (sytuacja IV). Innymi słowy, idąc na wybory, nie może on zmienić rezultatu na swoją niekorzyść, a wstrzymując się od głosu, nigdy nie zyska zmiany rezultatu na negatywny (czyli korzystny dla niego). Przedstawia ono również zbiory wyników referendum, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję, ma wpływ na rezultat referendum (zmieniając ją na głosowanie, może pozytywny wynik zmienić na negatywny — zdarzenie I, a decydując się na wstrzymanie, może wynik negatywny zmienić na pozytywny — sytuacja V).

Twierdzenie 1. Niech $P_0 = (t, m)$, $P_1 = \left(t + \frac{1}{k}, \frac{mt}{t+1/k}\right)$, $P_2 = \left(t - \frac{1}{k}, \frac{mt}{t-1/k}\right)$, $V = \{(t, m) \in [0, 1]^2 : m \geq M_0(t)\}$. Wtedy:

1° jeśli $P_0 \in V$, to $P_2 \in V$,

2° jeśli $P_0 \notin V$ to, $P_1 \notin V$,

3° jeśli $P_0 \in PN := \{(t, m) \in V : m < -\frac{t}{2} + 1 - \frac{2tk-2k+1}{2tk^2}\}$, to $P_1 \notin V$,

4° jeśli $P_0 \in NP := \{(t, m) \in [0, 1]^2 \setminus V : m \geq -\frac{t}{2} + 1 - \frac{2k-2tk+1}{2tk^2}\}$, to $P_2 \in V$.

Dowód. 1° $P_0 \in V$, więc $m \geq -\frac{t}{2} + 1$. Załóżmy, że $P_2 \notin V$, czyli

$$\frac{mt}{t-1/k} < -\frac{t-1/k}{2} + 1,$$

$$mt < -\frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{2t}{k} + \frac{1}{k^2} \right) + t - \frac{1}{k},$$

$$m < -\frac{t}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} + 1 - \frac{1}{tk}.$$

Ponieważ $m \geq -\frac{t}{2} + 1$, to

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} - \frac{1}{tk} > 0,$$

$$2tk - 1 - 2k > 0,$$

$$t > \frac{2k+1}{2k} > 1,$$

co daje sprzeczność, bo $t \in [0, 1]$. Stąd $P_2 \in V$.

2° Przypuśćmy, że $P_1 \in V$. Stąd wynika, że

$$\frac{mt}{t+1/k} \geq -\frac{t+1/k}{2} + 1,$$

$$mt \geq -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{2t}{k} + \frac{1}{k^2} \right) + t + \frac{1}{k},$$

$$m \geq -\frac{t}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} + 1 + \frac{1}{tk}.$$

Ponieważ $P_0 \notin V$, więc $m < -\frac{t}{2} + 1$. Wykorzystując tę nierówność mamy

$$-\frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} + \frac{1}{tk} < 0,$$

$$-2tk - 1 + 2k < 0,$$

$$t > \frac{2k-1}{2k},$$

$$t > 1 - \frac{1}{2k},$$

co jest sprzeczne z założeniem $t \in \{\frac{1}{k}, \dots, 1 - \frac{1}{k}\}$. Dlatego $P_1 \notin V$.

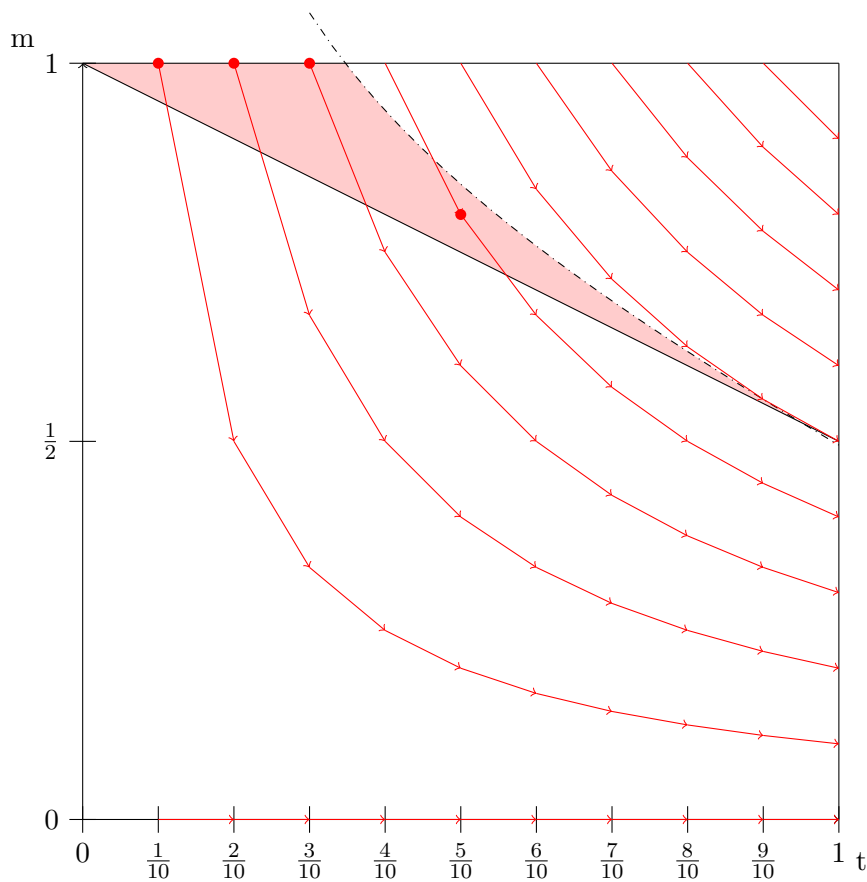
3° Szukamy takich t i m , że

$$m \geq -\frac{t}{2} + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t+1/k} < -\frac{t+1/k}{2} + 1,$$

$$m \geq -\frac{t}{2} + 1 \quad \text{i} \quad m < -\frac{t}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} + 1 + \frac{1}{tk}.$$

Stąd

$$-\frac{t}{2} + 1 \leq m < -\frac{t}{2} + 1 - \frac{2tk - 2k + 1}{2tk^2}.$$



Rysunek 3.10: Zbiór wyników referendum, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na głosowanie, zmieni pozytywny rezultat referendum na negatywny dla $k = 10$. W tym przypadku są cztery takie wyniki, zaznaczone kropkami.

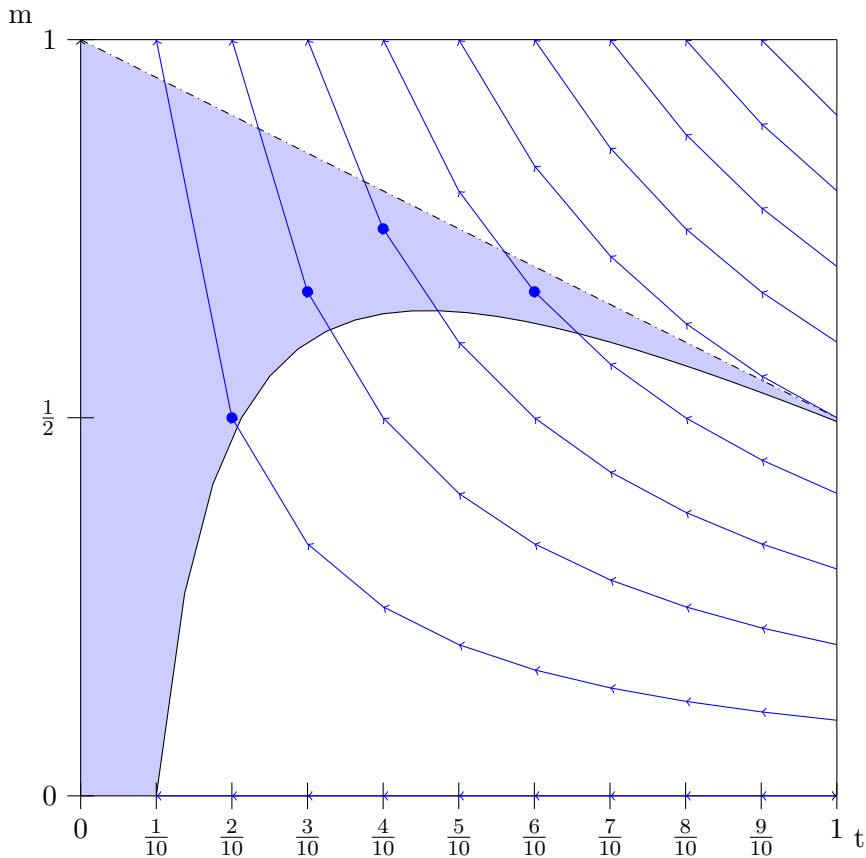
4° Szukamy takich t i m , że

$$m < -\frac{t}{2} + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t - 1/k} \geq -\frac{t - 1/k}{2} + 1,$$

$$m < -\frac{t}{2} + 1 \quad \text{i} \quad m \geq -\frac{t}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2tk^2} + 1 - \frac{1}{tk}.$$

Czyli

$$-\frac{t}{2} + 1 > m \geq -\frac{t}{2} + 1 - \frac{2k - 2tk + 1}{2tk^2}.$$



Rysunek 3.11: Zbiór wyników referendum, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na wstrzymanie, zmieni negatywny rezultat referendum na pozytywny dla $k = 10$. W tym przypadku są cztery takie wyniki, zaznaczone kropkami.

□

Zauważmy, że zbiory PN i NP są równoliczne, ponieważ $P_0 = (t, m) \in PN$ wtedy i tylko, gdy $P_1 = \left(t + \frac{1}{k}, \frac{m}{t+1/k}\right) \in NP$.

2. $a \geq 0$

Kolejne twierdzenie jest uogólnieniem Twierdzenia 1 na przypadek $a \geq 0$.

Twierdzenie 2. Niech $P_0 = (t, m)$, $P_1 = \left(t + \frac{1}{k}, \frac{mt}{t+1/k}\right)$, $P_2 = \left(t - \frac{1}{k}, \frac{mt}{t-1/k}\right)$,
 $PN_a := \{(t, m) \in V : m < \frac{2ak^3t^3 + (6ak^2 - 2ak^3 - k^3)t^2 + (6ak - 4ak^2 - 2k^2 + 2k^3)t + 2a - 2ak - k + 2k^2}{2k^3t}\}$,
 $NP_a := \{(t, m) \in [0, 1]^2 \setminus V : m \geq \frac{2ak^3t^3 - (6ak^2 + 2ak^3 + k^3)t^2 + (6ak + 4ak^2 + 2k^2 + 2k^3)t - 2a - 2ak - k - 2k^2}{2k^3t}\}$,
 $V = \{(t, m) \in [0, 1]^2 : m \geq M_a(t)\}$, gdzie $a \geq 0$. Wtedy:

1° jeśli $P_0 \in V$, to $P_2 \in V$,

2° jeśli $P_0 \notin V$, to $P_1 \notin V$,

3° jeśli $P_0 \in PN_a$, to $P_1 \notin V$,

4° jeśli $P_0 \in NP_a$, to $P_2 \in V$.

Dowód. 1° $P_0 \in V$, więc $m \geq at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$. Chcemy sprawdzić, czy $P_2 \in V$, czyli czy

$$\frac{mt}{t-1/k} \geq a(t-1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t-1/k) + 1.$$

Z założenia wiemy, że $mt \geq at^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t^2 + t$, więc po przekształceniu musimy sprawdzić, czy

$$at^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t^2 + t \geq a(t-1/k)^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t-1/k)^2 + t - 1/k.$$

Jest to równoważne nierówności

$$a \left(-\frac{3t^2}{k} + \frac{3t}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right) - \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2t}{k} + \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{k} < 0.$$

Zauważmy, że dla ustalonego $t \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}$, lewa strona nierówności jest funkcją liniową zmiennej a . Wystarczy więc sprawdzić, czy dla $a \in [0, \frac{1}{2}]$ funkcja $h(a) := a \left(-\frac{3t^2}{k} + \frac{3t}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \frac{2t}{k} - \frac{1}{k^2} \right) + \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k}$ jest niedodatnia. Ponieważ jest to funkcja liniowa, sprawdzimy znak $h(0)$ i $h\left(\frac{1}{2}\right)$:

- Przypuśćmy, że $h(0) = \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k} > 0$. Stąd $t > 1 + \frac{1}{2k}$, co daje sprzeczność, bo $t \in [0, 1]$.
- Obliczamy $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3t}{2k^2} - \frac{3t^2}{2k} - \frac{1}{2k^3} + \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k}$. Ponieważ $2k^3 \cdot h\left(\frac{1}{2}\right)$ ma taki sam znak co $h\left(\frac{1}{2}\right)$, więc pokażemy, że

$$-3k^2t^2 + (3k + 4k^2)t - 1 - 2k - 2k^2 < 0.$$

Zauważmy, że współczynnik przy t^2 jest ujemny dla $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $\Delta < 0$, to $h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}$.

$$\Delta = 9k^2 + 24k^3 + 16k^2 - 12k^2(1 + 2k + 2k^2) = -3k^2 - 8k^4 < 0,$$

stąd $\frac{mt}{t-1/k} \geq a(t-1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t-1/k) + 1$.

2° $P_0 \notin V$, więc $m < at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$. Chcemy sprawdzić, czy $P_1 \notin V$, czyli czy

$$\frac{mt}{t+1/k} < a(t+1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t+1/k) + 1,$$

$$mt < a(t+1/k)^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t+1/k)^2 + t + 1/k.$$

Z założenia wiemy, że $mt < at^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t^2 + t$, więc sprawdzimy, czy

$$at^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t^2 + t < a(t+1/k)^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t+1/k)^2 + t + 1/k,$$

$$a\left(\frac{3t^2}{k} + \frac{3t}{k^2} + \frac{1}{k^3}\right) - \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2t}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{k} > 0.$$

Zauważmy, że dla ustalonego $t \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}$, lewa strona nierówności jest funkcją liniową zmiennej a . Wystarczy więc sprawdzić, czy dla $a \in [0, \frac{1}{2}]$ funkcja $g(a) := a\left(\frac{3t^2}{k} + \frac{3t}{k^2} + \frac{1}{k^3} - \frac{2t}{k} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k}$ jest dodatnia. Ponieważ jest to funkcja liniowa, wystarczy sprawdzić jedynie znak $g(0)$ i $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Załóżmy, że $g(0) = -\frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k} < 0$, czyli $t > 1 - \frac{1}{2k}$, co znów daje sprzeczność, bo $t \in \{\frac{1}{k}, \dots, 1 - \frac{1}{k}\}$.
- Obliczamy $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3t^2}{2k} + \frac{3t}{2k^2} + \frac{1}{2k^3} - \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{t}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k}$. Ponieważ $2k^3 \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)$ ma taki sam znak co $g\left(\frac{1}{2}\right)$, więc pokażemy, że

$$3k^2t^2 + (3k - 4k^2)t + 1 - 2k + 2k^2 > 0.$$

Zauważmy, że współczynnik przy t^2 jest dodatni dla $k \in \mathbb{N}$. Jeśli więc $\Delta < 0$, to $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}$. Obliczamy

$$\Delta = 9k^2 - 24k^3 + 16k^2 - 12k^2(1 - 2k + 2k^2) = -3k^2 - 8k^4 < 0,$$

stąd $\frac{mt}{t+1/k} < a(t+1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t+1/k) + 1$.

3° Szukamy takich t i m , że

$$m \geq at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t+1/k} < a(t+1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t+1/k) + 1,$$

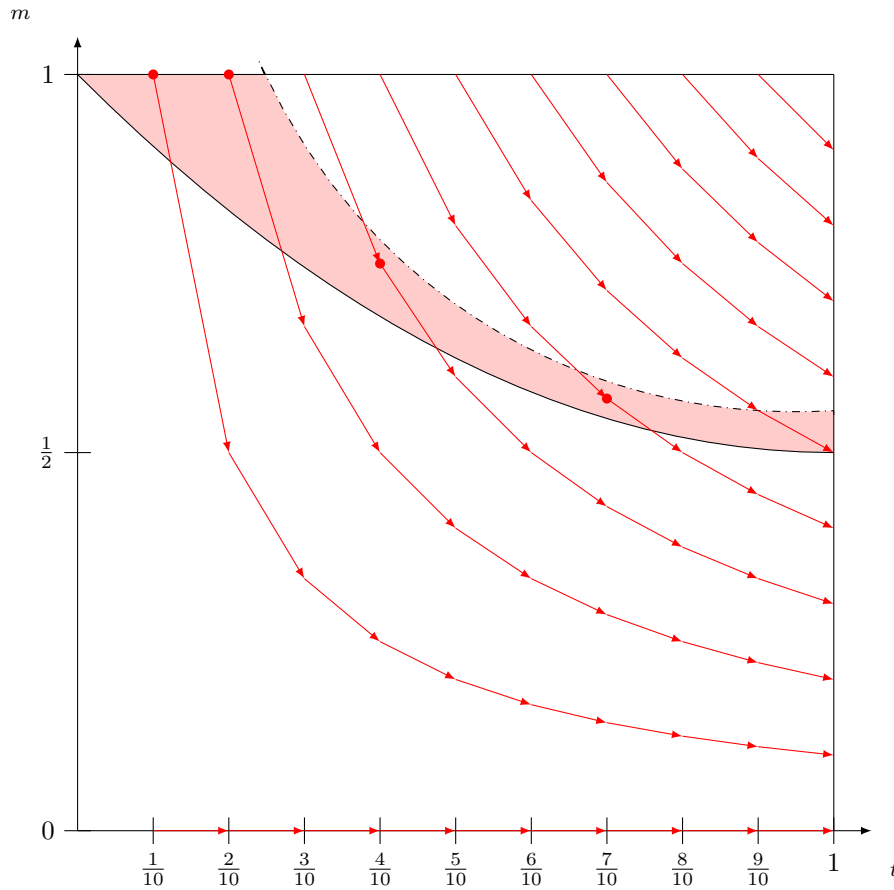
czyli

$$m \geq at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$$

$$\text{i} \quad m < at^2 + \frac{3at}{k} + \frac{3a}{k^2} + \frac{a}{k^3t} - at - \frac{2a}{k} - \frac{a}{kt} - \frac{t}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2t} + 1 + \frac{1}{kt},$$

stąd

$$(t, m) \in V \quad \text{oraz} \\ m < \frac{2ak^3t^3 + (6ak^2 - 2ak^3 - k^3)t^2 + (6ak - 4ak^2 - 2k^2 + 2k^3)t + 2a - 2ak - k + 2k^2}{2k^3t}.$$



Rysunek 3.12: Zbiór wyników referendum, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na głosowanie, zmieni pozytywny rezultat referendum na negatywny dla $k = 10$. W tym przypadku są cztery takie wyniki, zaznaczone kropkami.

4° Szukamy takich t i m , że

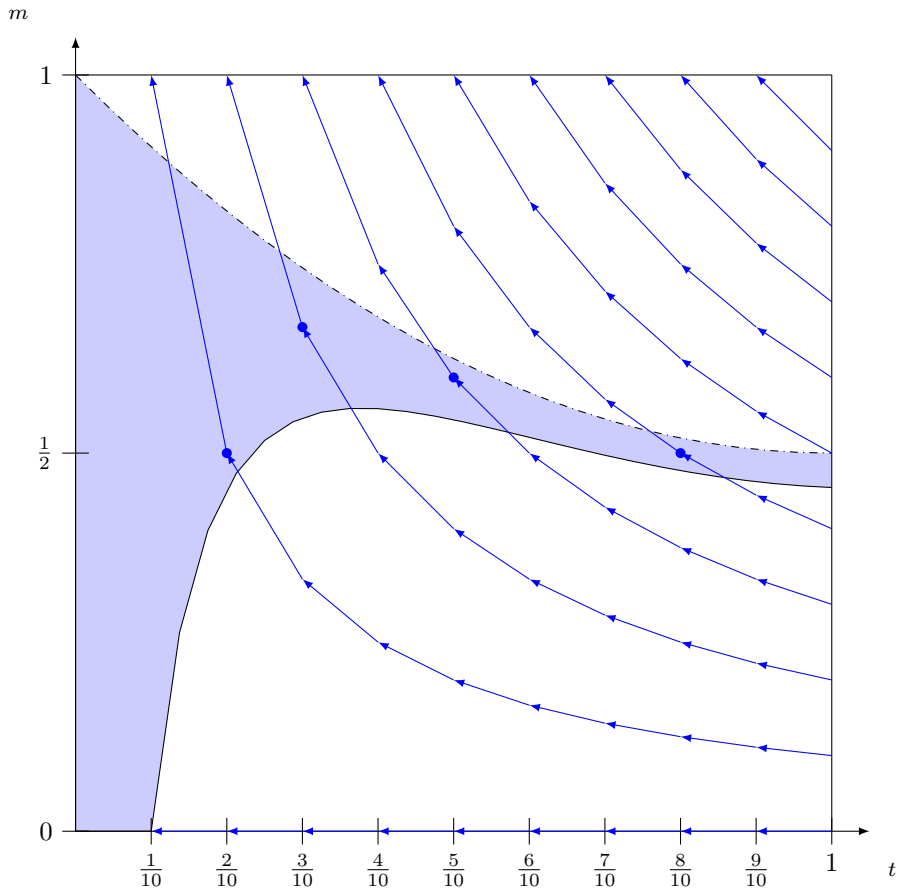
$$m < at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t - 1/k} \geq a(t - 1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t - 1/k) + 1,$$

czyli

$$m < at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1 \\ \text{i} \quad m \geq at^2 - \frac{3at}{k} + \frac{3a}{k^2} - \frac{a}{k^3t} - at + \frac{2a}{k} - \frac{a}{k^t} - \frac{t}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2t} + 1 - \frac{1}{kt},$$

stąd

$$(t, m) \notin V \quad \text{oraz} \\ m \geq \frac{2ak^3t^3 - (6ak^2 + 2ak^3 + k^3)t^2 + (6ak + 4ak^2 + 2k^2 + 2k^3)t - 2a - 2ak - k - 2k^2}{2k^3t}.$$

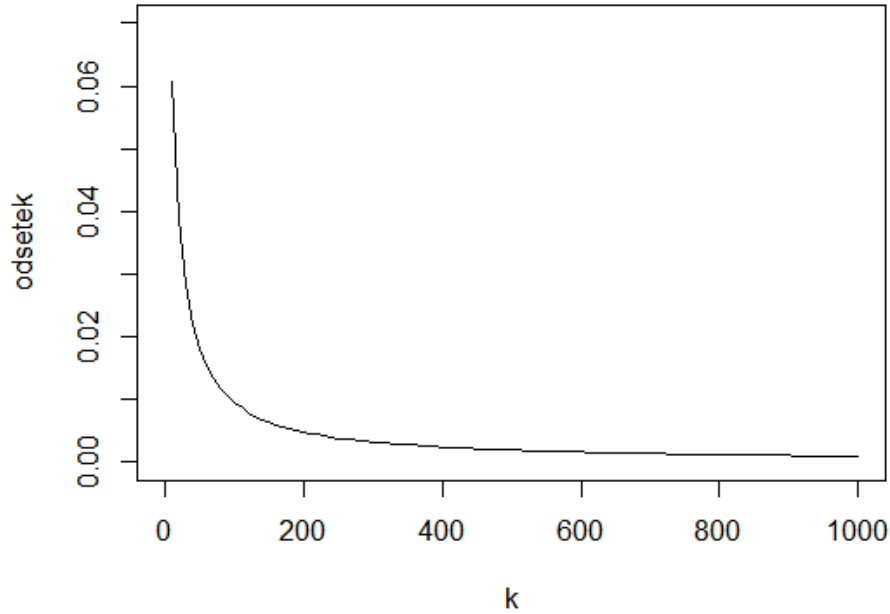


Rysunek 3.13: Zbiór wyników referendum, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na wstrzymanie, zmieni negatywny rezultat referendum na pozytywny dla $k = 10$. W tym przypadku są cztery takie wyniki, zaznaczone kropkami.

□

Podobnie jak dla $a = 0$ zbiory PN_a i NP_a są równoliczne, ponieważ jeśli $P_0 = (t, m) \in PN_a$, to $P_1 = \left(t + \frac{1}{k}, \frac{m}{t+1/k}\right) \in NP_a$ oraz jeśli $P_0 = (t_1, m_1) \in NP_a$, to $P_2 = \left(1 - \frac{1}{k}, \frac{m_1}{t_1-1/k}\right) \in PN_a$.

Poniższy wykres przedstawia odsetek wyników, dla przykładowych k , w których wyborca negatywny jest decyzyjny.



Rysunek 3.14: Stosunek mocy zbioru $PN_{\frac{1}{2}}$ do liczby wszystkich możliwych wyników dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$ i $a = \frac{1}{2}$.

3. $a < 0$

Kolejne twierdzenie przedstawia cztery zbiory wyników, dla których zmiana decyzji wyborcy negatywnego jest dla niego korzystna (sytuacja I i VII z Rys. 3.2), bądź nie (zarówno idąc na wybory — sytuacja III, jak i wstrzymując się od głosu — V).

Twierdzenie 3. Niech $P_0 = (t, m)$, $P_1 = \left(t + \frac{1}{k}, \frac{mt}{t+1/k}\right)$, $P_2 = \left(t - \frac{1}{k}, \frac{mt}{t-1/k}\right)$, $V = \{(t, m) \in [0, 1]^2 : m \geq M_a(t)\}$,

$$c_{a,k,t} := \frac{2ak^3t^3 + (6ak^2 - 2ak^3 - k^3)t^2 + (6ak - 4ak^2 - 2k^2 + 2k^3)t + 2a - 2ak - k + 2k^2}{2k^3t},$$

$$d_{a,k,t} := \frac{2ak^3t^3 - (6ak^2 + 2ak^3 + k^3)t^2 + (6ak + 4ak^2 + 2k^2 + 2k^3)t - 2a - 2ak - k - 2k^2}{2k^3t},$$

$$PN_a^+ := \{(t, m) \in V : m < c_{a,k,t}\},$$

$$NP_a^+ := \{(t, m) \in [0, 1]^2 \setminus V : m \geq d_{a,k,t}\},$$

$$PN_a^- := \{(t, m) \in V : m < d_{a,k,t}\},$$

$$NP_a^- := \{(t, m) \in [0, 1]^2 \setminus V : m \geq c_{a,k,t}\}, \text{ gdzie } a < 0. \text{ Wtedy:}$$

1° dla $t^* := \frac{2ak^2 + k^2 - 3ak - k\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak^2}$, jeśli $P_0 = (t^*, m)$ leży na dolnym brzegu zbioru

V , to P_1 również leży na dolnym brzegu zbioru V ,

2° jeśli $P_0 \in PN_a^+$, to $P_1 \notin V$,

3° jeśli $P_0 \in NP_a^+$, to $P_2 \in V$,

4° jeśli $P_0 \in PN_a^-$, to $P_1 \in V$,

5° jeśli $P_0 \in NP_a^-$, to $P_2 \notin V$.

Dowód. 1^o Musimy znaleźć takie t , że

$$\frac{t \left(at^2 - \left(a + \frac{1}{2} \right) t + 1 \right)}{t + 1/k} = M_a \left(t + \frac{1}{k} \right),$$

$$at^3 - \left(a + \frac{1}{2} \right) t^2 + t = a(t + 1/k)^3 - \left(a + \frac{1}{2} \right) (t + 1/k)^2 + t + 1/k,$$

$$3ak^2 t^2 + (3ak - 2ak^2 - k^2) t + a - ak - \frac{k}{2} + k^2 = 0.$$

Niech $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $h(t) := 3ak^2 t^2 + (3ak - 2ak^2 - k^2) t + a - ak - \frac{k}{2} + k^2$. Szukając miejsca zerowego tej funkcji musimy sprawdzić, czy

$$\Delta(a) = k^2(k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2) \geq 0$$

dla $k \in \mathbb{N}$ i $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$. Wystarczy, że sprawdzimy, czy $k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2 \geq 0$, gdyż $k^2 > 0$. Zauważmy, że dla $k = 1$ nierówność przyjmuje postać $a^2 - 8a + 1 \geq 0$. Dla ujemnych wartości a nierówność ta jest spełniona, gdyż każdy jednomian przyjmuje wartości dodatnie dla $a < 0$. Przypuśćmy teraz, że $(4k^2 - 3)a^2 - 8k^2a + k^2 < 0$ dla jakiegoś $k = 2, 3, \dots$ oraz $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$. Ponieważ wyrażenie to ma dwa pierwiastki ($\Delta_a := 64k^4 - 4k^2(4k^2 - 3) = 48k^4 + 12k^2 > 0$) oraz ramiona paraboli skierowane są do góry, to $a \in \left(\frac{8k^2 - \sqrt{48k^4 + 12k^2}}{8k^2 - 6}, \frac{8k^2 + \sqrt{48k^4 + 12k^2}}{8k^2 - 6} \right)$. Daje nam to sprzeczność, ponieważ $\frac{8k^2 - \sqrt{48k^4 + 12k^2}}{8k^2 - 6} > 0$ dla $k > 1$. Stąd $\Delta(a) > 0$ dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ oraz $k \in \mathbb{N}$.

Tak więc pierwiastkami trójmianu kwadratowego h są liczby

$$t_1 := \frac{2ak^2 + k^2 - 3ak + k\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak^2}$$

i

$$t_2 := \frac{2ak^2 + k^2 - 3ak - k\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak^2}.$$

Teraz sprawdzimy, który z punktów, t_1 czy t_2 , należy do przedziału $[0, 1]$. Załóżmy, że $t_1 < 0$, czyli

$$\frac{2ak + k - 3a + \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak} < 0,$$

$$2ak + k - 3a + \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2} > 0,$$

$$\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2} > 3a - k - 2ak.$$

Ponieważ prawa strona nierówności jest ujemna ($3a < 0$ oraz $(1 + 2a)k > 0$), a pierwiastek kwadratowy jest liczbą nie mniejszą niż zero, więc $t_1 < 0$.

Teraz sprawdzimy drugi pierwiastek. Załóżmy, że $t_2 \leq 0$, więc

$$\frac{2ak + k - 3a - \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak} \leq 0,$$

$$2ak + k - 3a - \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2} \geq 0,$$

$$2ak + k - 3a \geq \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}.$$

Nierówność możemy obustronnie podnieść do kwadratu, ponieważ $2ak + k - 3a > 0$ (dla $k = 1$ mamy $2a + 1 - 3a = 1 - a > 0$, a wartość wyrażenia rośnie wraz z k , bo $2a + 1 \geq 0$).

Stąd

$$4a^2k^2 + 4ak^2 + k^2 + 9a^2 - 12a^2k - 6ak \geq k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2,$$

$$2k^2 + 2a - 2ak - k \leq 0,$$

$$a \geq \frac{k(1-2k)}{2(1-k)} > 0$$

dla $k > 1$, co daje sprzeczność, bo $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$, więc $t_2 > 0$. Sprawdźmy teraz, czy $t_2 < 1$.

Przypuśćmy, że

$$\frac{2ak + k - 3a - \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak} > 1,$$

$$2ak + k - 3a - \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2} < 6ak,$$

$$k - a(3 + 4k) < \sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}.$$

Wyrażenie $k - a(3 + 4k)$ jest nieujemne dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$, więc możemy obie strony nierówności podnieść do kwadratu.

$$k^2 - 2ak(3 + 4k) + 9a^2 + 24a^2k + 16a^2k^2 < k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2,$$

$$12a^2 + 24a^2k + 12a^2k^2 - 6ak < 0,$$

$$12a + 24ak + 12ak^2 - 6k > 0,$$

co daje sprzeczność, gdyż każdy jednomian przyjmuje wartość niedodatnią. Mamy więc, że $t_2 < 1$, czyli $t_2 \in (0, 1)$. W ten sposób znaleźliśmy wzór na t^* dla $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$ i $k \in \mathbb{N}$:

$$t^* = \frac{2ak^2 + k^2 - 3ak - k\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak^2}.$$

2° i 4° Szukamy takich t i m , że

$$m \geq at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t + 1/k} < a(t + 1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t + 1/k) + 1,$$

$$m \geq at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$$

$$\text{i} \quad m < at^2 + \frac{3at}{k} + \frac{3a}{k^2} + \frac{a}{k^3t} - at - \frac{2a}{k} - \frac{a}{k^t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2t} + 1 + \frac{1}{kt}.$$

Stąd

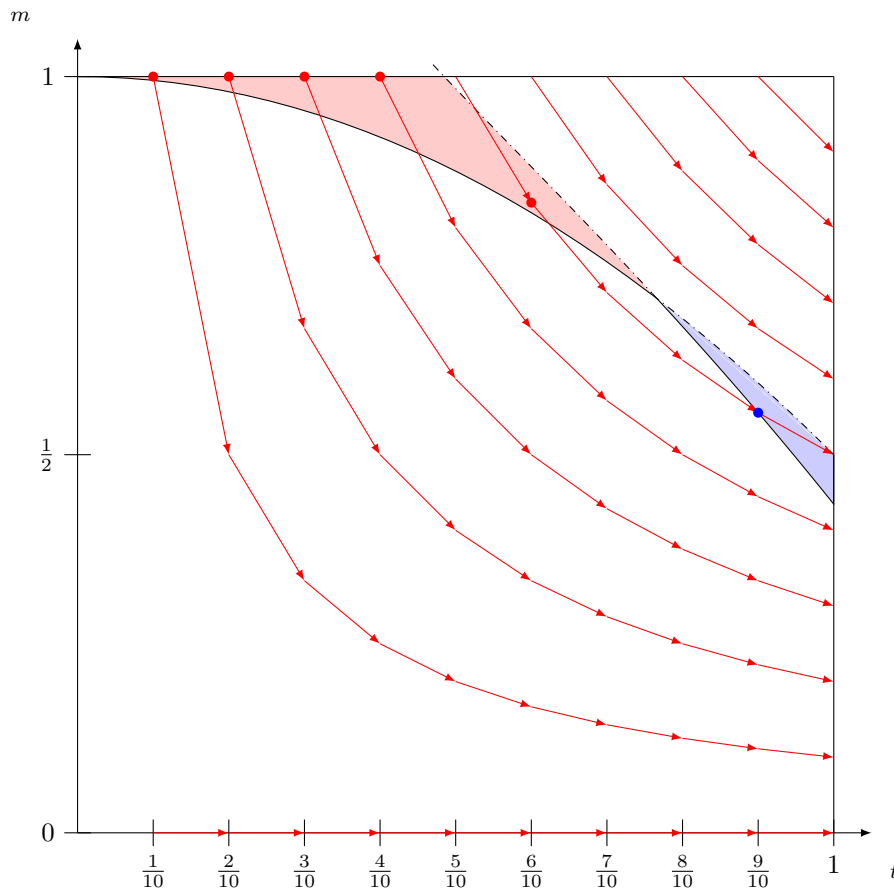
$(t, m) \in V$ oraz

$$m < \frac{2ak^3t^3 + (6ak^2 - 2ak^3 - k^3)t^2 + (6ak - 4ak^2 - 2k^2 + 2k^3)t + 2a - 2ak - k + 2k^2}{2k^3t}.$$

W punkcie 4^o szukamy przeciwnych nierówności, więc

$(t, m) \notin V$ oraz

$$m \geq \frac{2ak^3t^3 + (6ak^2 - 2ak^3 - k^3)t^2 + (6ak - 4ak^2 - 2k^2 + 2k^3)t + 2a - 2ak - k + 2k^2}{2k^3t}.$$



Rysunek 3.15: Zbiór wyników referendum dla $k = 10$, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na głosowanie na nie, zmieni:

- zbiór czerwony — pozytywny rezultat referendum na negatywny (tutaj jest pięć takich przypadków zaznaczonych czerwonymi kropkami);
- zbiór niebieski — negatywny rezultat referendum na pozytywny (tutaj jest jeden taki przypadek zaznaczony niebieską kropką).

3^o i 5^o Szukamy takich t i m , że

$$m < at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1 \quad \text{i} \quad \frac{mt}{t - 1/k} \geq a(t - 1/k)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)(t - 1/k) + 1,$$

czyli

$$m < at^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + 1$$

$$\text{i } m \geq at^2 - \frac{3at}{k} + \frac{3a}{k^2} - \frac{a}{k^3t} - at + \frac{2a}{k} - \frac{a}{k^t} - \frac{t}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2t} + 1 - \frac{1}{kt}.$$

Dlatego

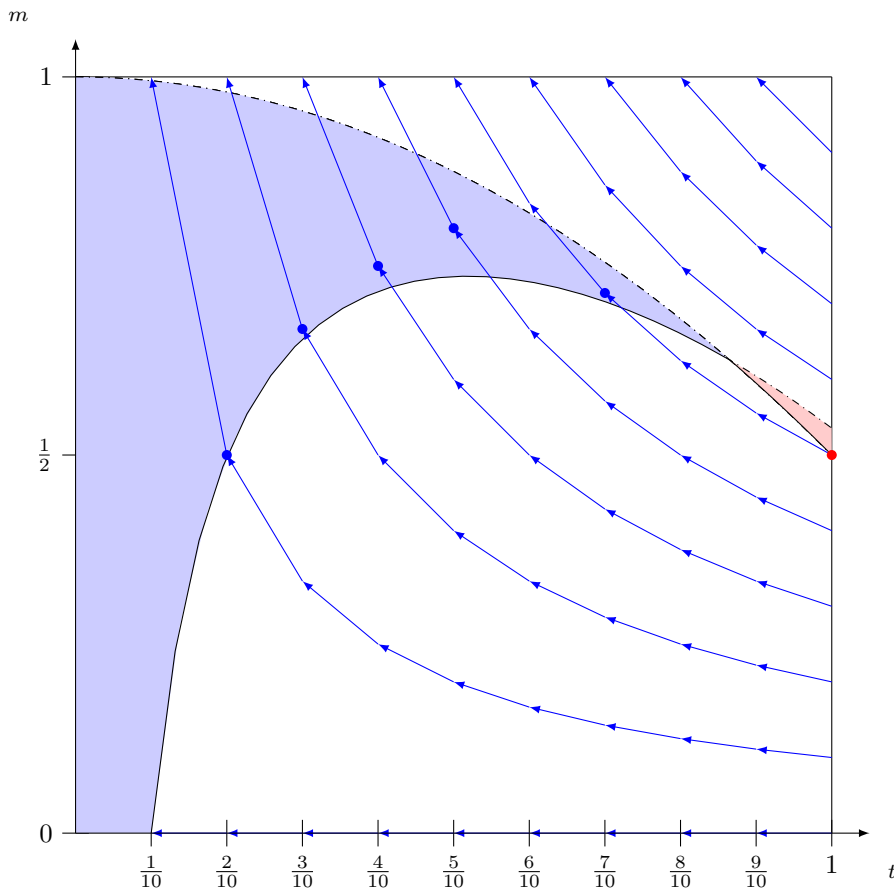
$$(t, m) \notin V \quad \text{oraz}$$

$$m \geq \frac{2ak^3t^3 - (6ak^2 + 2ak^3 + k^3)t^2 + (6ak + 4ak^2 + 2k^2 + 2k^3)t - 2a - 2ak - k - 2k^2}{2k^3t}.$$

W punkcie 5° szukamy przeciwnych nierówności, czyli

$$(t, m) \in V \quad \text{oraz}$$

$$m < \frac{2ak^3t^3 - (6ak^2 + 2ak^3 + k^3)t^2 + (6ak + 4ak^2 + 2k^2 + 2k^3)t - 2a - 2ak - k - 2k^2}{2k^3t}.$$



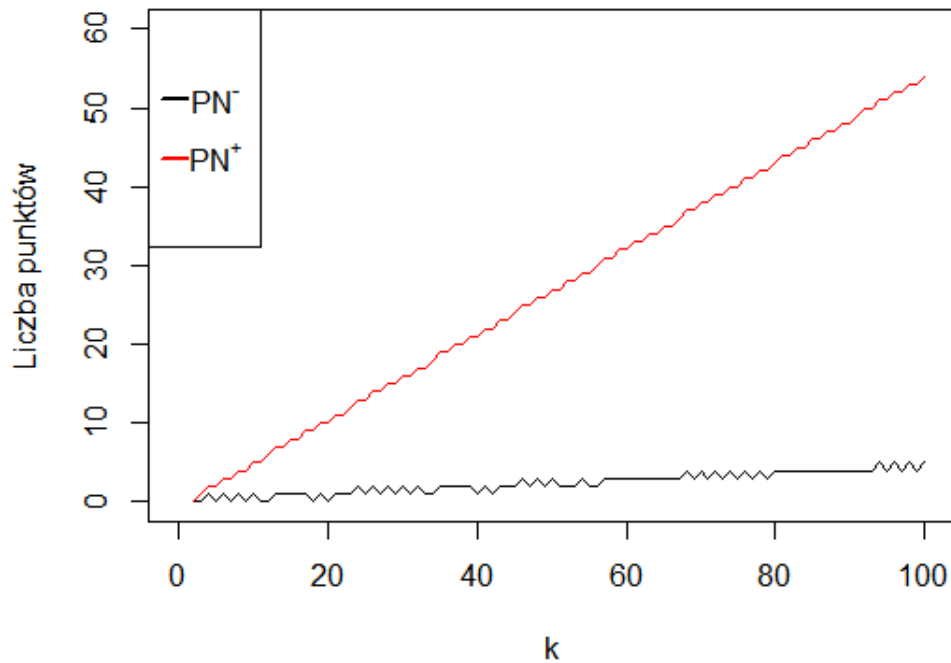
Rysunek 3.16: Zbiór wyników referendum dla $k = 10$, dla których wyborca negatywny, zmieniając swoją decyzję na wstrzymanie, zmieni:
 — zbiór niebieski — negatywny rezultat referendum na pozytywny (tutaj jest pięć takich przypadków zaznaczonych niebieskimi kropkami);
 — zbiór czerwony — pozytywny rezultat referendum na negatywny (tutaj jest jeden taki przypadek zaznaczony czerwoną kropką).

□

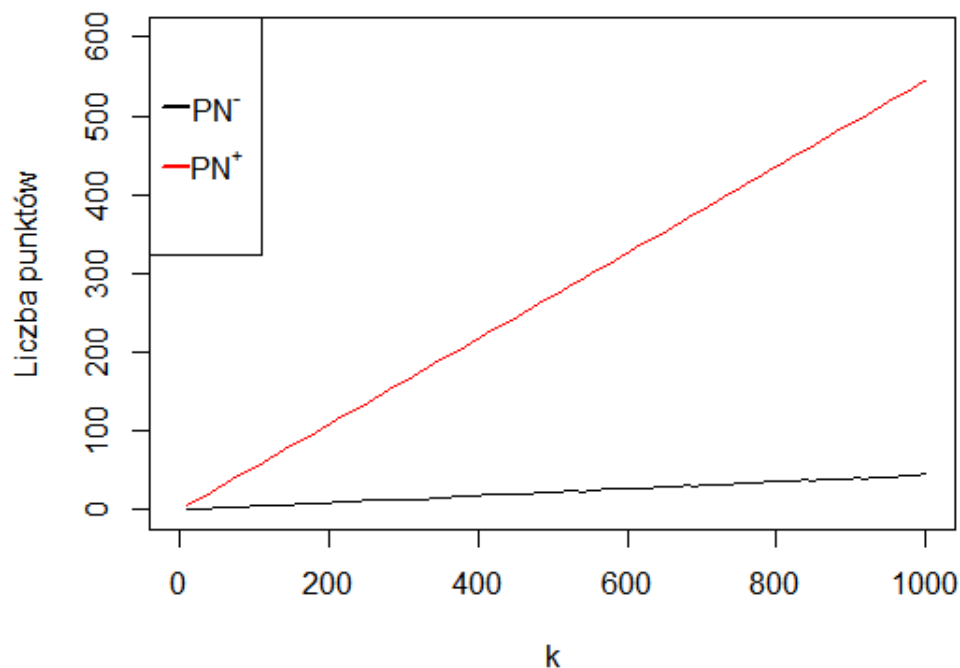
Zauważmy, że dla dużych wartości k (gdy $k \rightarrow \infty$) otrzymujemy wzór (3.1):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2ak^2 + k^2 - 3ak - k\sqrt{k^2 - 8ak^2 + 4a^2k^2 - 3a^2}}{6ak^2} = \frac{1}{3} + \frac{1 - \sqrt{4a^2 - 8a + 1}}{6a}.$$

Tak jak dla poprzednich przypadków zbiór PN_a^+ jest równoliczny z NP_a^+ , a zbiór PN_a^- jest równoliczny z NP_a^- . Poniższe wykresy przedstawiają moce zbiorów PN_a^+ i PN_a^- dla różnych k .



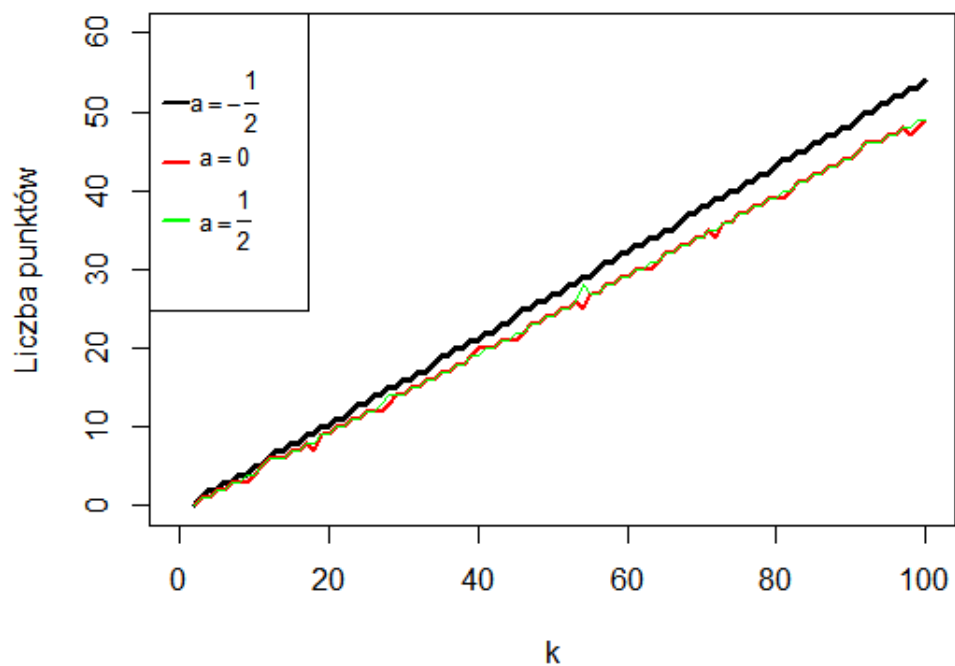
Rysunek 3.17: Moc zbioru PN_a^+ i PN_a^- dla $k \in \{2, \dots, 100\}$ i $a = -\frac{1}{2}$.



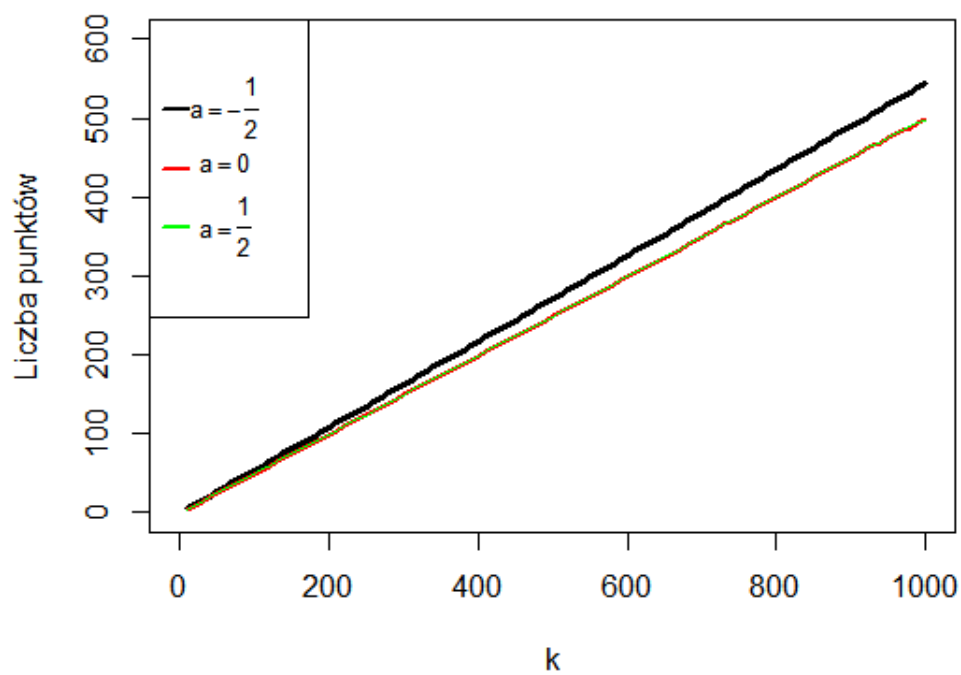
Rysunek 3.18: Moc zbioru PN_a^+ i PN_a^- dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$ i $a = -\frac{1}{2}$.

4. Porównanie modeli

Tak jak we wszystkich systemach referendalnych, w modelach, w których funkcja M_a definiuje próg większości kwalifikowanej, wyborca negatywny w większości przypadków nie ma wpływu na rezultat referendum. Im więcej osób jest uprawnionych do głosowania, tym mniejsze znaczenie ma jego głos (patrz Rys. 3.14). Zauważmy jednak, że dla modeli M_a może on zmienić rezultat referendum na swoją korzyść idąc na wybory, a wstrzymując swój głos może — przeciwnie — zmienić negatywny rezultat na pozytywny (czyli niekorzystny dla niego), gdy wynik referendum jest bliski progu M . Co zaskakujące, liczba tych wyników, dla ustalonego k , w niewielkim stopniu zależy od a (patrz Rys. 3.19, Rys. 3.20).

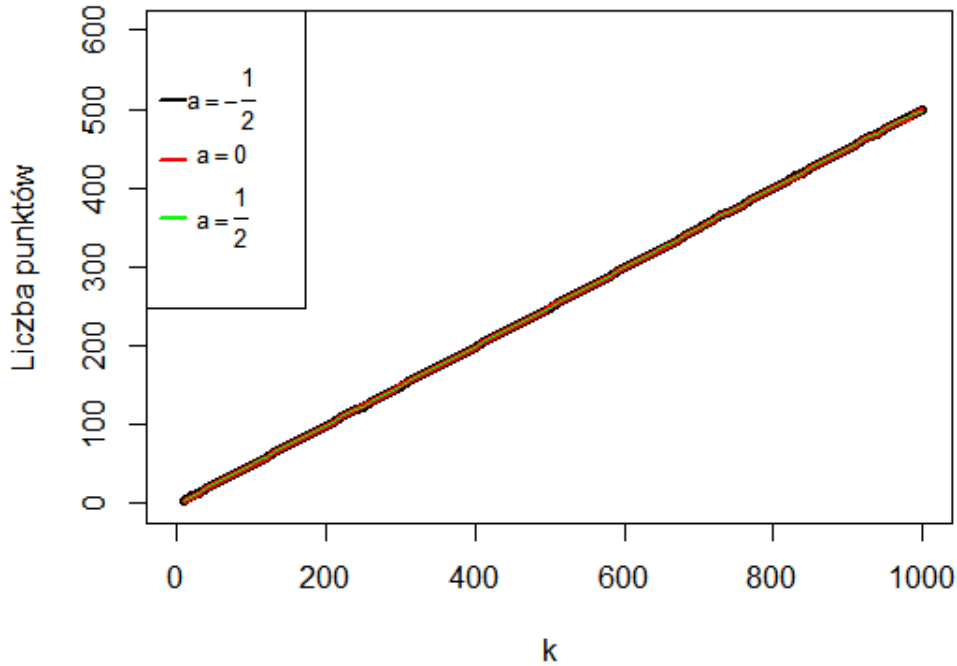


Rysunek 3.19: Moc zbioru $PN_{-\frac{1}{2}}^+$, PN i $PN_{\frac{1}{2}}$ dla $k \in \{2, \dots, 100\}$.



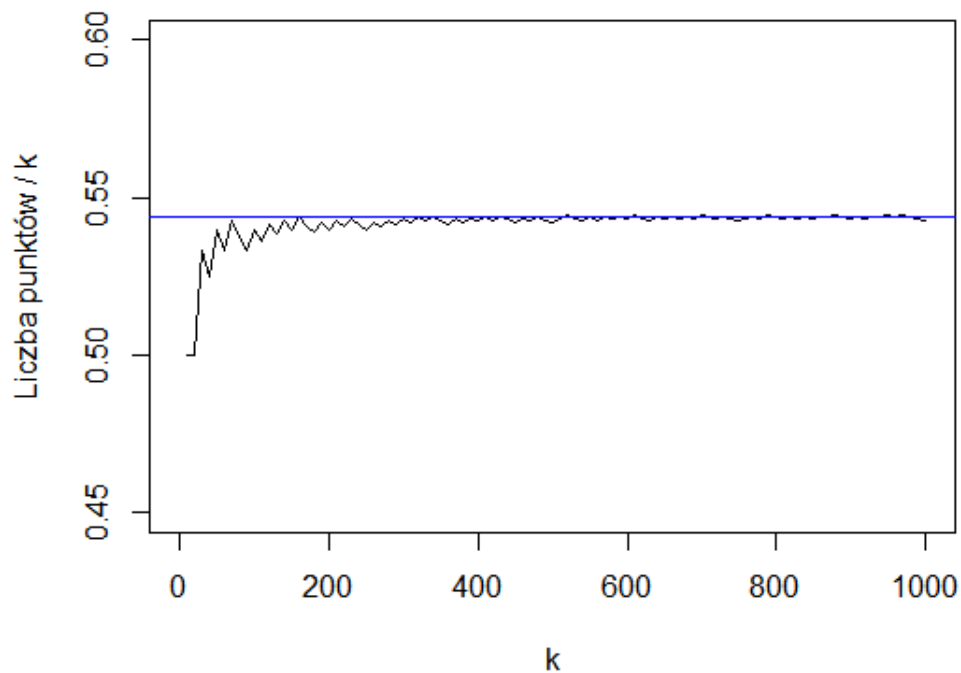
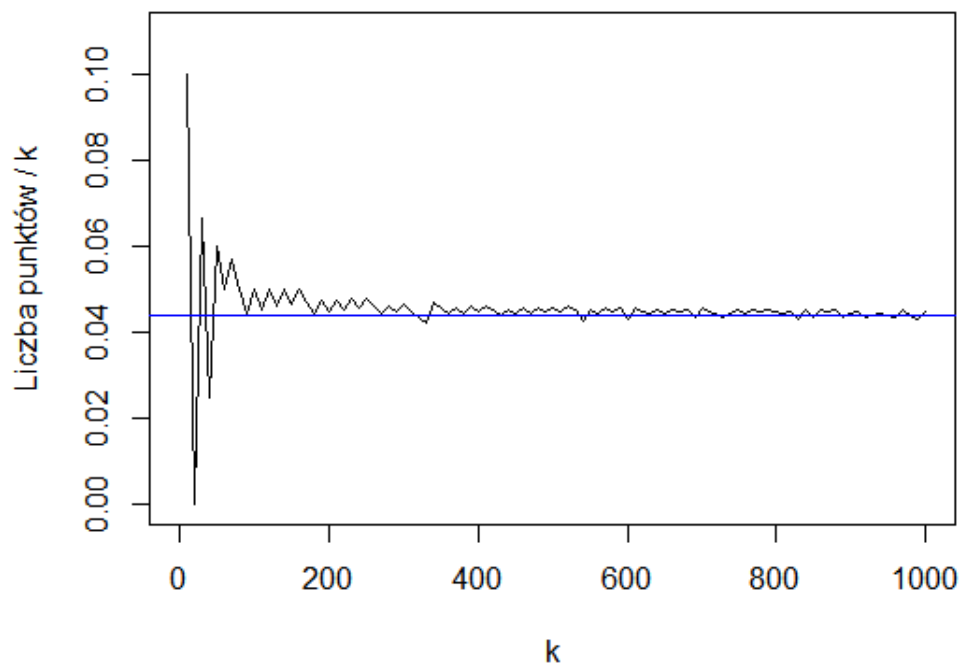
Rysunek 3.20: Moc zbioru $PN_{-\frac{1}{2}}^+$, PN i $PN_{\frac{1}{2}}$ dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$.

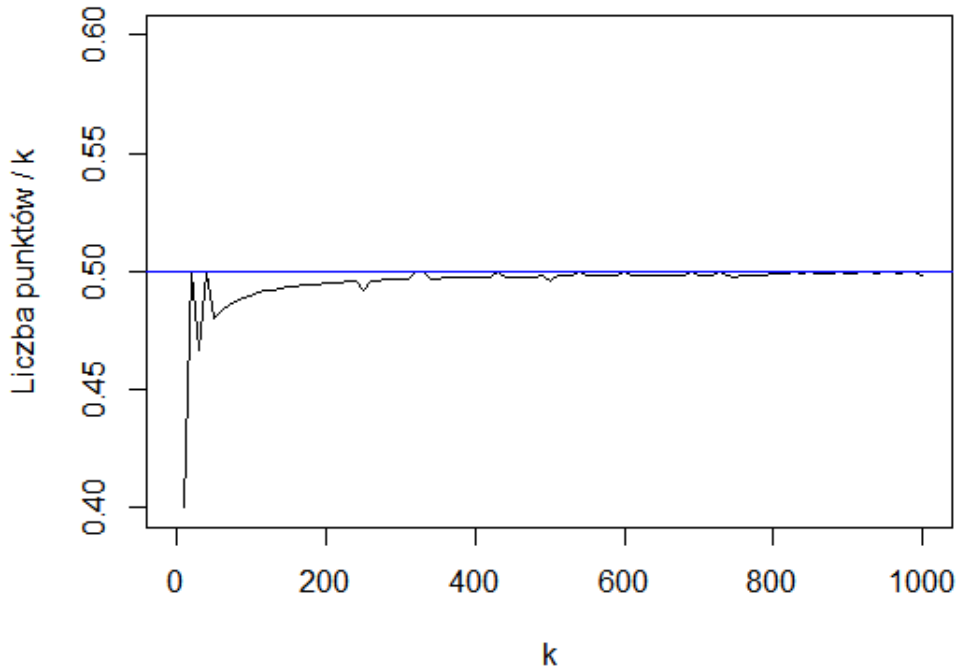
Najwięcej takich wyników jest dla $a < 0$, ale w tym przypadku może się zdarzyć (choć takich sytuacji jest niewiele), że zmiana decyzji na pójście na referendum, zmieni rezultat na niekorzyść wyborcy, a zmiana na wstrzymanie się od głosowania, na jego korzyść. Poniższy wykres (Rys. 3.21) przedstawia $\#PN_{-\frac{1}{2}}^+ - \#PN_{-\frac{1}{2}}^-$, $\#PN$ i $\#PN_{\frac{1}{2}}$ dla różnych k . Warto zauważyć, że w tym przypadku, dla każdego $a \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ liczba punktów jest bardzo zbliżona.



Rysunek 3.21: $\#PN_{-\frac{1}{2}}^+ - \#PN_{-\frac{1}{2}}^-$, $\#PN$ i $\#PN_{\frac{1}{2}}$ dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$.

Na podstawie powyższego wykresu możemy przypuszczać, że $\#PN \approx \#PN_{\frac{1}{2}} \approx \#PN_{-\frac{1}{2}}^+ - \#PN_{-\frac{1}{2}}^- \sim \frac{k}{2}$. Niech $a_k = \#PN_{-\frac{1}{2}}^+$, $b_k = \#PN_{-\frac{1}{2}}^-$. Analizując wykresy stosunku mocy zbioru do k dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$ (Rys. 3.22, 3.23, 3.24) twierdzimy, że $a_k \sim 0,544k$ i $b_k \sim 0,044k$.

Rysunek 3.22: $\#PN_{-\frac{1}{2}}^+/k$ dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$.Rysunek 3.23: $\#PN_{-\frac{1}{2}}^-/k$ dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$.



Rysunek 3.24: $\#PN_{-\frac{1}{2}}^+ - \#PN_{-\frac{1}{2}}^- / k$ dla $k \in \{10, 20, \dots, 1000\}$.

Przy założeniu, że postawiona powyżej hipoteza jest prawdziwa oraz wiedząc, że $N(k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \sim \frac{k^2}{2}$ możemy stwierdzić, że stosunek mocy zbioru PN (i analogicznie $PN_{\frac{1}{2}}$) do liczby wszystkich wyników jest równy asymptotycznie $\frac{1}{k}$, ponieważ:

$$\frac{\#PN}{N(k)} \sim \frac{k/2}{k^2/2} = \frac{1}{k}.$$

Podsumowując, dla $a \geq 0$ skonstruowany model spełnia oczekiwane przez nas warunki, czyli wyborca negatywny zmianą swojej decyzji może wpłynąć na rezultat referendum tylko w „dobry” sposób. Mianowicie, idąc na wybory, może zmienić rezultat na negatywny, a na pewno nie zdarzy się sytuacja odwrotna. Rezygnując natomiast z oddania głosu, może jedynie spowodować przyjęcie propozycji. Gdy w modelu przyjmujemy $a < 0$, to „dobrych” sytuacji będzie więcej, niż dla nieujemnych a , ale za to może się zdarzać, że wyborca, nie idąc na wybory, odniesie jednak korzyść, a głosując przeciwko propozycji, uzyska niechciany przez siebie, pozytywny rezultat. Prawdopodobieństwo wystąpienia tej ostatniej sytuacji jest jednak niewielkie. Przypuszczamy dodatkowo, że wpływ wyborcy negatywnego w przypadku $a \geq 0$ maleje jak $1/k$, zaś dla $a < 0$ różnica „dobrego” i „złego” wpływu też zmienia się w dokładnie taki sposób. Wyniki numeryczne potwierdzają te hipotezy.

Literatura

- [1] Aguiar-Contraria L., Magalhães P.C., *Referendum design, quorum rules and turnout*, Public Choice, nr 144, 2010, s. 63–81.
- [2] Côte-Real P.P., Pereira P.T., *The voter who wasn't there: Referenda, representation and abstention*, Social Choice and Welfare, nr 22, 2004, s. 349–369.
- [3] Herrera H., Mattozzi A., *Quorum and turnout in referenda*, Journal of the European Economic Association, nr 8, 2010, s. 838–871.
- [4] Ilvessalo S., *Fińska inicjatywa obywatelska – nowe głosy w dyskusji*, Green European Journal, Second Print Edition, 2014, s. 73–76.
- [5] Pattie C., Denver D., Mitchell J., Bochel H., *The 1997 Scottish referendum: an analysis of the results*, Scottish Affairs, nr 22, 1998, s. 1–15.
- [6] Reuchamps M. *Referendum as a Tool for Building European Identity. The Case of Belgium, Luxembourg, and The Netherlands*, Cahiers de Sciences politiques de l'ULg, Cahier n°6.
- [7] Rzążewski K., Słomczyński W., Życzkowski K., *Każdy głos się liczy. Wędrowka przez krainę wyborów.*, Wydawnictwo Sejmowe, 2014.
- [8] Stawicki R. *Zarys instytucji referendum jako formy demokracji bezpośredniej. Referendum ogólnokrajowe w Polsce*, Zespół Analiz i Opracowań Tematycznych, 2013, dostępny w internecie: http://www.senat.gov.pl/gfx/senat/pl/senatopracowania/50/plik/ot-620_internet.pdf [dostęp 6 lipca 2016].

Źródła

- [9] Kodeks wyborczy Republiki Albanii, dostępny w internecie: <http://www.venice.coe.int/VOTA/en/start.html> [dostęp 6 lipca 2016].

- [10] Akt 28/2001, uchwalony dnia 22 listopada zmieniający Akt o Systemie Wyborczym i Referendum, w dostępny w internecie: <http://www.legislationline.org/topics/country/46/topic/6> [dostęp 6 lipca 2016].
- [11] Konstytucja Republiki Austrii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [12] Konstytucja Królestwa Belgii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [13] Konstytucja Republiki Chorwacji, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [14] Ustawa o referendum z dnia 19 lutego 2001 r., dostępna w internecie: <http://www.legislationline.org> [dostęp 6 lipca 2016].
- [15] Konstytucja Królestwa Danii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [16] Konstytucja Republiki Estońskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [17] Konstytucja Hiszpanii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [18] Ustawa z dnia 24 października 2011r Dz.U. nr 220 poz. 4023, dostępna w internecie: <http://www.taxheaven.gr/laws/law/index/law/395#> [dostęp 6 lipca 2016].
- [19] Konstytucja Księstwa Liechtensteinu, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [20] Konstytucja Republiki Litewskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [21] Konstytucja Wielkiego Księstwa Luksemburga, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [22] Konstytucja Republiki Łotewskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [23] Konstytucja Republiki Macedonii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [24] Ustawa o referendum (poprawka z 1996r.), dostępna w internecie: <http://justiceservices.gov.mt/DownloadDocument.aspx?app=lp&itemid=21665&l> [dostęp 6 lipca 2016].
- [25] Konstytucja Republiki Mołdawii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].

- [26] Ustawa Zasadnicza Republiki Federalnej Niemiec, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [27] Podstawowa umowa służby cywilnej, dostępna w internecie: <https://www.regjeringen.no/no/no/id4/> [dostęp 6 lipca 2016].
- [28] Konstytucja Rzeczypospolitej Polskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [29] Konstytucja Republiki Portugalskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [30] Konstytucja Federacji Rosyjskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [31] Konstytucja Republiki Słowackiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [32] Konstytucja Republiki Słowenii, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [33] Konstytucja Federalna Konfederacji Szwajcarskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [34] Akt o formie Rządu z 28 lutego 1974 r., dostępny w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [35] Konstytucja Republiki Tureckiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [36] Ustawa o ogólnonarodowych i lokalnych referendach z 3 lipca 1991 r., dostępna w internecie: <http://www.legislationline.org> [dostęp 6 lipca 2016].
- [37] Ustawa zasadnicza Węgier, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].
- [38] Parliamentary Voting System and Constituencies Act 2011, dostępny w internecie: <http://www.legislation.gov.uk> [dostęp 6 lipca 2016].
- [39] Government of Wales Act 2006, dostępny w internecie: <http://www.legislation.gov.uk> [dostęp 6 lipca 2016].
- [40] Konstytucja Republiki Włoskiej, dostępna w internecie: biblioteka.sejm.gov.pl/konstytucje_swiata [dostęp 6 lipca 2016].