UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
INSTYTUT MATEMATYKI

DARIA BORATYN

GŁOSOWANIE STRATEGICZNE

PRACA MAGISTERSKA NAPISANA POD KIERUNKIEM
DR. HAB. WOJCIECHA SŁOMCZYŃSKIEGO

KRAKÓW 2016

SKŁADAM SERDECZNE PODZIĘKOWANIA
PANU DR. HAB. WOJCIECHOWI SŁOMCZYŃSKIEMU
ZA OFIAROWANY MI CZAS, CENNE WSKAZÓWKI,
WYROZUMIAŁOŚĆ I OGROMNE WSPARCIE.

Spis treści

Wstęp

Terminem głosowanie strategiczne określa się sytuację, w której pewien wyborca oddaje w wyborach głos niereprezentujący jego prawdziwych preferencji wyborczych, a uzyskany w ten sposób wynik wyborów uważa on za lepszy niż rezultat będący skutkiem głosowania odpowiadającego jego prawdziwym preferencjom.

Zjawisko głosowania strategicznego, nazywane również manipulacją, było znane od dawna. Najstarszy opis wyborów, w których doszło do manipulacji, znajdujemy w *Epistulae* Pliniusza Młodszego, który opisuje sprawę sądu nad niewolnikami rzymskiego konsula Gnejusza Afraniusza Dekstera oskarżonymi o zamordowanie swojego pana [**8**]. Natomiast na przełomie XVIII i XIX wieku Pierre Simon de Laplace i Napoléon Bonaparte niezależnie zauważyli, że system punktów Bordy, który opisujemy w pierwszym rozdziale, nie jest odporny na głosowanie strategiczne. Pomimo tego faktu punkty Bordy były w latach 1796-1803 używane przez Francuską Akademię Nauk do wyboru jej członków.

Motywacją do napisania niniejszej pracy było to, że obecnie często mamy do czynienia z głosowaniem strategicznym ze względu na liczne i szeroko zakrojone sondaże przedwyborcze, które pozwalają wyborcom na zorientowanie się, czy może opłacić im się głosować strategicznie oraz jaki głos powinni oddać, aby zwiększyć szanse swoich faworytów. Jedną z najbardziej popularnych metod głosowania strategicznego jest na przykład zagrzebywanie, polegające na umieszczaniu przez wyborcę tego kandydata, któremu nie chce on pozwolić na zwycięstwo, na samym dole listy wyborczej. Należy zauważyć, że nie jest możliwe udowodnienie, że w jakichś wyborach doszło do manipulacji, jednak można to z dużą dozą prawdopodobieństwa stwierdzić na podstawie porównania wyników właściwych wyborów z wynikami sondaży oraz, w przypadku wyborów dwuturowych, wyników kandydatów z obu tur. Najsłynniejsze przykłady wyborów podejrzanych o głosowanie strategiczne to wybory prezydenckie we Francji w 2002 roku oraz wybory parlamentarne w Słowenii w 2011 roku - szacuje się, że w tych wyborach nawet 30% wyborców mogło głosować strategicznie.

Za ojca badań nad głosowaniem strategiczym uznajemy Robina Farquharsona, który w pracy [**4**] napisanej wraz z Michaelem Dummettem zawarł hipotezę, że większość systemów wyborczych dopuszcza możliwość efektywnego głosowania strategicznego. Pierwsze twierdzenie na ten temat pochodzi z prac Allana Gibbarda [**5**] i Marka Satterthwaite'a [**9**] odpowiednio z 1973 i 1975 roku. Następne dwa twierdzenia zostały natomiast sformułowane przez Johna Duggana i Thomasa Schwartza w pracy [**2**] z 1992 roku i pracy [**3**] z 2000 roku. Kolejne znaczące na tym polu wyniki opublikował Alan D. Taylor w pracy [**11**] z 2002 roku.

Celem niniejszej pracy jest ujednolicenie terminologii dotyczącej głosowania strategicznego, uporządkowanie i doprecyzowanie rozumowań, wypełnienie luk w dowodach wymienionych wcześniej twierdzeń oraz przedstawienie związków między rzeczonymi twierdzeniami. Matematyka wyborcza jest relatywnie młodą dziedziną. Z tego powodu wcześniejsze prace traktujące na temat głosowania strategicznego sformułowane zostały w języku teorii gier, mimo iż obecnie teoria wyboru społecznego i teoria gier to oddzielne działy matematyki. Prace Duggana i Schwartza napisane zostały w języku porządków, natomiast praca Taylora definiowała pojęcia w sposób nieformalny. Z tego względu konieczne było sformułowanie spójnej terminologii związanej z manipulacją. Została ona przeze mnie zbudowana w języku słabych porządków. W większości przypadków nie istniała wcześniej w języku polskim ustalona terminologia: około połowa pojęć zawartych w pierwszym rozdziale i wszystkie pojęcia z rozdziału trzeciego zostały nazwane przeze mnie. Części stosowanych pojęć brakowało ścisłych matematycznych definicji, które również stworzyłam samodzielnie. W cytowanej literaturze istnieją cztery istotnie różne wersje twierdzenia Duggana-Schwartza. Jednym z głównych wyników pracy było udowodnienie, że dwa z nich są równoważnymi wersjami pozostałych dwóch oraz samodzielne opracowanie związków między tymi dwoma. Drugim najważniejszym zadaniem było sformalizowanie i uzupełnienie dowodów twierdzeń. Należy zauważyć, że teoria głosowania strategicznego nie została stworzona przez matematyków (spośród jej twórców: Gibbarda, Satterthwaite'a, Duggana, Schwartza i Taylora matematykiem z wykształcenia jest tylko Taylor). Z tego powodu dowody twierdzeń, na których się opierałam, wymagały matematycznego opracowania zawartych tam idei, uzupełnienia luk i sformalizowania rozumowań. Większość przedstawionych przeze mnie dowodów bazuje na osiągnięciach wymienionych autorów, natomiast kilka wyników udowodniłam samodzielnie.

Niniejsza praca podzielona jest na cztery rozdziały. Pierwszy z nich rozpoczyna się przedstawieniem przykładów kilku systemów wyborczych, które są używane w dalszej części rozdziału do zobrazowania zdefiniowanych tam pojęć. W drugim podrozdziale zawarte są podstawowe definicje potrzebne do zbudowania teorii głosowania strategicznego. Są one zbudowane w języku porządków, a zastosowana przeze mnie notacja rozbudowuje notację przyjętą przez Duggana i Schwartza w pracy [**2**]. Sformułowałam samodzielnie matematyczne definicje: profilu, zbioru faworytów, dolnej monotoniczności dla singletonów i połowicznej rezolutności. W podrozdziale trzecim wprowadzone zostały podstawowe definicje dotyczące zbioru decyzyjnego, słabej i silnej dyktatury, manipulacji w systemach decyzyjnych oraz manipulacji przez optymistę i pesymistę. Definicje odporności systemów decyzyjnych na manipulację, manipulację przez optymistę i manipulację przez pesymistę są autorskie. Ostatni podrozdział zawiera definicję relacji preferencji społecznych i kilka jej własności. Przedstawiony w tym rozdziale Przykład 1.11 został zaczerpnięty z [**1**], wszystkie pozostałe przykłady są autorskie.

Drugi rozdział jest poświęcony manipulacji w systemach decyzyjnych. Przedstawione zostało twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a, mówiące o tym, że w przypadku, gdy w wyborach startuje co najmniej trzech kandydatów i każdy z nich może wygrać, każdy decyzyjny i odporny na manipulacje system wyborczy jest silną dyktaturą. Dowód Lematu 2.3 przeprowadziłam samodzielnie. Dowód Twierdzenia 2.2 został opracowany na podstawie dowodu z [**10**], który sformalizowałam.

Rozdział trzeci opisuje przypadek systemów efektywnych. W podrozdziale pierwszym opisany został Paradoks Codorceta pokazujący, że anonimowe i neutralne systemy wyborcze nie są decyzyjne, co uzasadnia potrzebę rozważenia systemów efektywnych. Opracowanie paradoksu jest autorskie. W podrozdziale drugim przedstawione zostały pojęcia potrzebne do zdefiniowania manipulacji w systemach efektywnych. Przedstawione definicje pochodzą z [**2**], na ich podstawie samodzielnie zbudowałam dla dowolnego wyborcy porządek na zbiorach zwycięzców zgodny z porządkiem na jego liście wyborczej i przedstawiłam analogię między pojęciami manipulacji w systemach decyzyjnych i efektywnych. W trzecim podrozdziale sformułowane zostały dwie wersje pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza: pierwsza pochodząca z [**2**] i wykorzystująca zbudowany wcześniej porządek i druga pochodząca z [**11**] i operująca pojęciami manipulacji przez optymistę i pesymistę. Dowód pierwszej części Lematu 3.11 wykazującego równoważność tych dwóch wersji jest oparty na rozumowaniu z [**2**], dowód drugiej przeprowadziłam samodzielnie. Twierdzenie to zostało następnie jeszcze raz sformułowane w języku zbudowanych przeze mnie porządków. Dowód pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza przytaczam według [**2**] z niewielkimi modyfikacjami. W szczególności samodzielnie udowodniłam Lemat 3.15. Ostatni podrozdział przedstawia dwie wersje drugiego twierdzenia Duggana-Schwartza pochodzące z [**3**] i [**11**]. One również są równoważne, ponownie na mocy Lematu 3.11. Związki pomiędzy pierwszym i drugim twierdzeniem Duggana-Schwartza opracowałam sama. Dowód drugiego twierdzenia został przeprowadzony na podstawie [**3**] z doprecyzowaniem i uzupełnieniem istniejących tam rozumowań.

Ostatni rozdział uogólnia wszystkie przedstawione wcześniej twierdzenia na przypadek systemów dopuszczających remisy na listach wyborczych. Otwiera go opis kilku takich systemów, po którym następują dwa przykłady pokazujące manipulację w tychże systemach. Oba opracowałam samodzielnie. W pierwszym podrozdziale zawarte jest uogólnienie twierdzenia Gibbarda-Satterthwaite'a, zaś w drugim pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza - w dwóch wersjach: Twierdzenie 4.8 pochodzi z pracy [**11**], a jego równoważna wersja (Twierdzenie 4.7) zostało sformułowane przeze mnie na podstawie Lematu 3.11. Przedstawione dowody obu twierdzeń zostały opracowane odpowiednio na podstawie [**10**] i [**11**] z niewielkimi modyfikacjami polegającymi na doprecyzowaniu i sformalizowaniu rozumowań.

Warto na koniec zauważyć, że istniejące twierdzenia o manipulacji wskazują wyłącznie na możliwość głosowania strategicznego, ale nie dają żadnych informacji na temat tego, jak często w danym systemie wyborczym faktycznie do niego dochodzi. Interesującym pomysłem, jak wskazuje Hannu Nurmi w pracy [**7**], byłoby zbadanie tej częstotliwości i określenie na tej podstawie stopnia podatności na głosowanie strategiczne konkretnych systemów wyborczych.

ROZDZIAŁ 1

Wprowadzenie

1. Przykłady systemów wyborczych

Na początek przedstawimy kilka przykładów systemów wyborczych.

System względnej większości to taki, w którym zwycięzcą zostaje kandydat (kandydaci przy równej liczbie głosów) uznany za faworyta przez największą liczbę wyborców.

Systemy preferencyjne to takie, w których od wyborców wymaga się uporządkowania wszystkich kandydatów na swoich listach wyborczych. Systemami preferencyjnymi są w szczególności **systemy punktowe**, czyli takie, w których kandydatom przyznawane są punkty w liczbach korespondujących z ich pozycjami na listach wyborczych, a o wyniku wyborów decydują sumy zdobytych punktów. Najbardziej powszechny z takich systemów to **system punktów Bordy**[1], w którym pierwsze miejsce jest warte $n-1$ punktów, a każde kolejne o 1 punkt mniej (dla n będącego liczbą kandydatów). Punkty Bordy są obecnie używane w niektórych instytucjach naukowych, a ich zmodyfikowana wersja jest stosowana w wyborach parlamentarnych w Republice Nauru na Południowym Pacyfiku.

Metoda Hare'a[2] to system polegający na iteracyjnym eliminowaniu kandydatów z najmniejszą liczbą pierwszych miejsc na listach wyborczych aż do momentu, gdy ktoś zdobędzie ponad 50% pierwszych miejsc lub wszyscy pozostali kandydaci będą ich mieć tyle samo. Metoda Hare'a jest wariantem systemu **pojedynczego głosu przechodniego (STV)** w przypadku kwoty równej $50\%+1$ pierwszych miejsc i konieczności uporządkowania wszystkich kandydatów. Jest stosowana między innymi w wyborach do niższej izby parlamentu w Australii.[3]

System pojedynczego głosu przechodniego to system proporcjonalny. Każdy wyborca porządkuje w nim na swojej liście wyborczej wszystkich lub pewną wybraną przez siebie liczbę (w zależności od wariantu systemu) kandydatów. Ustalana jest **kwota** (*quota*), czyli minimalna liczba głosów, którą kandydat musi zdobyć, aby zostać wybranym. Następnie dla każdego kandydata obliczana jest liczba zdobytych przez niego pierwszych miejsc.

[1] Jean-Charles de Borda (ur. 4 maja 1733 r., zm. 19 lutego 1799 r.) - francuski matematyk, fizyk, politolog i żeglarz. Od 1764 r. członek Francuskiej Akademii Nauk. Na jego cześć nazwano m.in. krater na Księżycu. System punktów Bordy został przez niego sformułowany w 1770 r. W latach 1796 - 1803 był on używany przez Francuską Akademię Nauk do wyboru członków.

[2] Sir Thomas Hare (ur. 28 marca 1806 r., zm. 6 maja 1891 r.) - brytyjski prawnik, autor wielu propozycji reform wyborczych. Był pomysłodawcą tego, aby do rozdziału mandatów w parlamencie używać reprezentacji proporcjonalnej.

[3] Metoda Hare'a jest w Australii nazywana metodą głosowania preferencyjnego. W pozostałych częściach świata jest ona stosowana pod kilkoma innymi nazwami.

Wszyscy ci kandydaci, którzy przekroczyli kwotę, zostają wybrani. **Głosy nadmiarowe** tych kandydatów, tj. różnice między ilością zdobytych przez nich głosów a kwotą, zostają następnie przeniesione na zdobywców drugiego miejsca na listach tych wyborców, u których byli oni faworytami (to, które głosy uznaje się za nadmiarowe, zależy od wariantu systemu). Jeżeli w tej sytuacji pojawiają się nowi kandydaci przekraczający kwotę, to oni również zostają zwycięzcami i procedura zostaje powtórzona. Jeżeli nie, to ze wszystkich list wyborczych wykreśla się kandydata z najmniejszą ilością pierwszych miejsc i ponownie sprawdza, czy ktoś przekroczył kwotę. Cały proces powtarza się aż do momentu wybrania wymaganej liczby zwycięzców. Ten system wyborczy jest stosowany między innymi w wyborach parlamentarnych w Irlandii i na Malcie oraz w wyborach do niższej izby parlamentu Tasmanii.[4]

Metoda Coombsa[5] to system polegający na iteracyjnym eliminowaniu kandydatów z największą liczbą ostatnich miejsc na listach wyborczych aż do momentu, gdy ktoś zdobędzie ponad 50% pierwszych miejsc lub wszyscy pozostali kandydaci będą ich mieć tyle samo.

Metoda Copelanda[6] to metoda, w której kandydaci porównywani są parami każdy z każdym, a za każdorazowe zwycięstwo, remis bądź porażkę przyznawane są im punkty w liczbie odpowiednio $1, \frac{1}{2}, 0$. Zwycięzcą zostaje kandydat (kandydaci) z największą liczbą punktów. Do systemu Copelanda bardzo podobna jest metoda kołowa używana w sporcie, w szczególności w rozgrywkach ligowych.

2. Podstawowe definicje

Niech dany będzie dowolny niepusty i skończony zbiór A oraz dowolna dodatnia liczba całkowita n. Zbiór A będziemy dalej nazywać **zbiorem kandydatów(alternatyw)**, n **liczbą wyborców**, zbiór $\{1, 2, ..., n\}$ **zbiorem wyborców**, a jego elementy - **wyborcami**. Kandydatów będziemy oznaczać przez x, y, ... a ich niepuste zbiory przez X, Y, ...

Powyższe oznaczenia będziemy stosować w całej pracy.

Definicja 1.1. Dowolną relację na zbiorze A nazywamy:

- **przechodnią**, jeżeli dla wszystkich $x, y, z \in A$ z tego, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z z, wynika, że x jest w relacji z z;
- **przeciwsymetryczną**, jeżeli dla wszystkich $x, y \in A$ z tego, że x jest w relacji z y, wynika, że y nie jest w relacji z x;

[4]W Tasmanii system pojedynczego głosu przechodniego nazywa się systemem Hare'a-Clarka na cześć Thomasa Hare'a i Andrew Clarka (ur. 24 lutego 1848 r., zm. 14 listopada 1907 r.) - prokuratora generalnego Tasmanii, który wprowadził ten system na wyspie.

[5]Clyde Hamilton Coombs (ur. 22 lipca 1912 r., zm. 4 lutego 1988 r.) - amerykański psycholog specjalizujący się w dziedzinie psychologii matematycznej, twórca teorii pomiaru psychologicznego i metody skalowania podstaw oraz tak zwanej teorii rozwijania. Zajmował się również zagadnieniami procesów decyzyjnych, zwłaszcza problematyką podejmowania decyzji ryzykownych.

[6]Arthur Herbert Copeland (22 czerwca 1898 r., zm. 6 lipca 1970 r.) - amerykański matematyk. Wykładał na Uniwersytecie Rice'a i Uniwersytecie Michigan. Zajmował się głównie podstawami rachunku prawdopodobieństwa. Razem z Paulem Erdősem badał własności stałej Copelanda-Erdősa.

- **spójną**, jeżeli dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi następująca alternatywa: x jest w relacji z y lub y jest w relacji z x.

DEFINICJA 1.2. **Słabym porządkiem wyborczym** na zbiorze A będziemy nazywać dowolną przechodnią i spójną relację na tym zbiorze.

Silnym porządkiem wyborczym na zbiorze A będziemy natomiast nazywać dowolny taki słaby porządek wyborczy, który jest dodatkowo przeciwsymetryczny.

Rodzinę wszystkich słabych porządków wyborczych na zbiorze A będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{L}(A)$.

DEFINICJA 1.3. **Profilem (na zbiorze A)** nazywamy dowolny ciąg należący do $(\mathcal{L}(A))^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Gdy $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ jest profilem, wtedy porządek wyborczy v_i będziemy nazywać **strategią (listą wyborczą) i-tego wyborcy** $(i = 1, ..., n)$. Największy element x w tym porządku będziemy oznaczać przez $\overline{x}^{v_i}$, zaś najmniejszy przez $\underline{x}_{v_i}$.

Zbiór wszystkich profili zbudowanych na bazie zbioru A będziemy oznaczać przez V.

Niech dane będą $x, y \in A$. Symbolem xv_iy oznaczamy sytuację, w której x jest większe od y w porządku wyborczym v_i.

DEFINICJA 1.4. Profile $v, v' \in A$ nazywamy **i-niezmienniczymi**, gdy dla każdego $j \neq i$, $j = 1, ..., n$ zachodzi $v_j = v'_j$.

PRZYKŁAD 1.5. Rozpatrujemy przypadek, w którym mamy trzech kandydatów (A, B, C) oraz czterech wyborców $(1, 2, 3, 4)$, których listy wyborcze przedstawiają tabele poniżej.

1	2	3	4
A	B	B	C
B	A	C	B
C	C	A	A

1	2	3	4
C	B	B	C
A	A	C	B
B	C	A	A

Powyższe profile są 1-niezmiennicze.

DEFINICJA 1.6. Niech $x, y \in A$. Profile v i v' nazywamy **xy-bliźniaczymi**, gdy dla każdego $i = 1, ..., n$ zachodzi: xv'_iy wtedy i tylko wtedy, gdy xv_iy. Dla każdego $i = 1, ..., n$ strategie v_i i v'_i nazywamy **xy-bliźniaczymi**, gdy zachodzi: xv'_iy wtedy i tylko wtedy, gdy xv_iy.

Oznacza to, że dwa profile są xy-bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające tym samym wyborcom strategie w obu tych profilach są xy-bliźniacze.

PRZYKŁAD 1.7. Ponownie rozpatrujemy przypadek, w którym mamy trzech kandydatów oraz czterech wyborców oznaczonych jak w poprzednim przykładzie. Poniższe profile są AB-bliźniacze.

1	2	3	4
A	B	B	C
B	A	C	B
C	C	A	A

1	2	3	4
C	C	C	C
A	B	B	B
B	A	A	A

Definicja 1.8. **Zbiorem faworytów dla profilu** v nazywamy najmniejszy w sensie inkluzji niepusty podzbiór właściwy X zbioru A o tej własności, że dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, dla każdego $x \in X$ oraz dla wszystkich $y \notin X$ zachodzi xv_iy.

Przykład 1.9. Dla profilu przedstawionego w pierwszej tabeli Przykładu 1.7 nie istnieje zbiór faworytów, natomiast dla drugiego profilu w rozpatrywanym przykładzie zbiorem faworytów jest $\{C\}$.

Definicja 1.10. **Systemem wyborczym** nazywamy dowolną funkcję $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Dla $v \in V$ zbiór $C(v)$ będziemy nazywać **zbiorem zwycięzców**, a jego elementy **zwycięzcami**.

Przykład 1.11. Rozpatrujemy[7] przypadek, w którym mamy czterech kandydatów (A, B, C, D) oraz 17 wyborców, których listy wyborcze przedstawia tabela poniżej.

6 osób	5 osób	4 osoby	2 osoby
A	D	C	B
B	C	D	D
C	A	B	A
D	B	A	C

W przypadku systemu względnej większości zbiorem zwycięzców jest tutaj $\{A\}$, w przypadku metody Hare'a $\{D\}$, a dla metody Coombsa, metody Copelanda oraz systemu punktów Bordy jest to $\{C\}$.

Definicja 1.12. System wyborczy C nazywamy **decyzyjnym**, jeżeli dla każdego profilu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę, a **efektywnym** wtedy, gdy zawsze wyłania co najmniej jednego zwycięzcę, tj. $C(v) \neq \varnothing$ dla każdego profilu v.

Niech dane będą $x, y \in A$, decyzyjny system wyborczy C oraz profile v i w. Załóżmy, że $C(v) = \{x\}$, a $C(w) = \{y\}$. Symbolem $C(v)v_iC(w)$ będziemy oznaczać sytuację, w której x jest większe od y w porządku wyborczym v_i.

Uwaga 1.13. Jeżeli dla pewnego profilu $v \in V$ i pewnego systemu wyborczego C zbiór zwycięzców $C(v)$ jest co najmniej dwuelementowy, to mówimy, że mamy do czynienia z **remisem**.

[7] Ten przykład pochodzi z [**1**].

Definicja 1.14. Kandydata x nazywamy **potencjalnym zwycięzcą** dla systemu wyborczego C, jeżeli istnieje co najmniej jeden profil $v \in V$, dla którego $C(v) = \{x\}$.

Taki system wyborczy, dla którego każdy kandydat jest potencjalnym zwycięzcą, nazywamy **niewykluczającym**.

Definicja 1.15. Kandydata x nazywamy **potencjalnym słabym zwycięzcą** dla systemu wyborczego C, jeżeli istnieje co najmniej jeden profil $v \in V$, dla którego $x \in C(v)$.

Taki system wyborczy, dla którego każdy kandydat jest potencjalnym słabym zwycięzcą, nazywamy **słabo niewykluczającym**.

Definicja 1.16. System wyborczy C spełnia **zasadę Pareto**[8], jeżeli dla każdego profilu $v \in V$ i dla każdych dwóch kandydatów $x, y \in A$ z tego, że dla każdego $i = 1, ..., n$ mamy xv_iy, wynika, że $y \notin C(v)$.

Inaczej mówiąc, system wyborczy C spełnia zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego profilu $v \in V$, dla każdego kandydata $x \in C(v)$ i dla każdego kandydata $y \in A \setminus \{x\}$ istnieje taki wyborca $i \in \{1, ..., n\}$, że xv_iy.

Definicja 1.17. System wyborczy C spełnia **dolną monotoniczność dla singletonów**, jeżeli dla wszystkich $v, v' \in V$ z tego, że spełnione są następujące warunki:

- $\#C(v) = 1$;
- istnieje takie $i \in \{1, 2, ..., n\}$, że profile v i v' są i-niezmiennicze;
- istnieje dokładnie jedno takie $x \in A \backslash C(v)$, że dla dokładnie jednego $y \in A \setminus \{x\}$ mamy:
  - profile v i v' są zw-bliźniacze dla wszystkich $z, w \in A \setminus \{x, y\}$;
  - profile v i v' są yz-bliźniacze dla każdego $z \in A \setminus \{x\}$;
  - profile v i v' są xz-bliźniacze dla każdego $z \in A \setminus \{y\}$;
  - xv_iy i yv'_ix;

wynika, że $C(v') = C(v)$.

Powyższy warunek oznacza, że każde takie dwa profile, że zbiór zwycięzców dla pierwszego jest jednoelementowy, a drugi powstaje z niego w ten sposób, że jeden wyborca przenosi w swojej strategii jednego przegrywającego kandydata o jedno miejsce w dół, mają ten sam jednoelementowy zbiór zwycięzców (przy ustalonym systemie wyborczym).

Przykład 1.18. Wracając do Przykładu 1.11, zauważmy, że zbiór zwycięzców dla każdego z wymienionych tam systemów wyborczych jest jednoelementowy i w żadnym z nich nie wygrywa kandydat B. Jeżeli jeden

[8] Nazwa pojęcia pochodzi od nazwiska Vilfredo Pareto (ur. 15 lipca 1848 r. w Paryżu, zm. 19 sierpnia 1923 r. w Céligny w Szwajcarii) - włoskiego ekonomisty i socjologa, któremu przypisuje się sformułowanie ekonomicznej zasady Pareto (inaczej zasady 20/80), zgodnie z którą rozkład wielu cech przyjmuje stosunek 20 do 80, np. 80% efektów pochodzi od 20% przyczyn. W rzeczywistości ekonomiczną zasadę Pareto sformułował Joseph Moses Juran (ur. 24 grudnia 1904 r. w Brăila, w Rumunii, zm. 28 lutego 2008 r.) - amerykański teoretyk zarządzania. Z nazwiskiem Pareto wiąże się również ekonomiczne pojęcie efektywności Pareto, inaczej optimum w sensie Pareto, które opisuje taki podział zasobów, w którym nie można poprawić sytuacji żadnego podmiotu bez pogorszenia sytuacji żadnego innego podmiotu.

z ostatnich dwóch wyborców przeniesie kandydata B o jedno miejsce w dół w swojej strategii, to otrzymamy następujący profil:

6 osób	5 osób	4 osoby	1 osoba	1 osoba
A	D	C	B	D
B	C	D	D	B
C	A	B	A	A
D	B	A	C	C

.

W przypadku systemu względnej większości, metod Hare'a, Coombsa i Copelanda zbiory zwycięzców nie ulegają zmianie. Natomiast w przypadku systemu punktów Bordy zbiorem zwycięzców dla nowego profilu jest $\{C, D\}$. Oznacza to, że system punktów Bordy nie spełnia warunku dolnej monotoniczności dla singletonów.

Definicja 1.19. System wyborczy C jest **połowicznie rezolutny**, jeżeli z tego, że istnieje dokładnie jedno $i \in \{1, 2, ..., n\}$, dla którego istnieją takie $x, y \in A$, że spełnione są następujące warunki:

- dla wszystkich $j, k \neq i$ mamy $v_j = v_k$,
- dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\}$ i dla każdego $z \in A \setminus \{x, y\}$ mamy xv_jz i yv_jz,
- dla wszystkich $j \neq i$ mamy xv_jy,
- xv_iy lub yv_ix,

wynika, że istnieje takie $t \in A$, że $C(v) = \{t\}$.

Powyższy warunek oznacza, że jeżeli strategie wszystkich wyborców poza co najwyżej jednym są takie same, a ostatnia strategia różni się od pozostałych co najwyżej wymianą kolejności dwóch czołowych kandydatów, to zbiór zwycięzców jest jednoelementowy.

3. Dyktatura i manipulacja

Definicja 1.20. Zbiór wyborców $X \subset \{1, ..., n\}$ nazywamy **zbiorem decyzyjnym nad kandydatami** a **i** b, jeżeli z tego, że dla każdego $v \in V$ i dla wszystkich $i \in X$ zachodzi av_ib, wynika, że $C(v) \neq \{b\}$.

To, że zbiór X jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b, będziemy oznaczać symbolem aXb.

Zbiór wyborców X nazywamy **zbiorem decyzyjnym**, jeżeli jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami x i y dla wszystkich par $(x, y) \in A^2$.

Definicja 1.21. Wyborcę i nazywamy **słabym dyktatorem** systemu wyborczego C, jeżeli dla każdego $v \in V$ i dla każdego $x \in A$ z tego, że xv_iy dla wszystkich $y \in A \setminus \{x\}$, wynika, że $x \in C(v)$. Inaczej mówiąc, wyborca jest słabym dyktatorem, jeżeli kandydat będący na pierwszym miejscu jego listy wyborczej zawsze należy do zbioru zwycięzców.

System wyborczy, w którym występuje słaby dyktator, nazywamy **słabą dyktaturą**.

Definicja 1.22. Wyborcę i nazywamy **silnym dyktatorem** systemu wyborczego C, jeżeli dla każdego $v \in V$ i dla każdego $x \in A$ z tego, że xv_iy dla wszystkich $y \in A \setminus \{x\}$, wynika, że $C(v) = \{x\}$. Innymi słowy, wyborca jest silnym dyktatorem, jeżeli kandydat będący na pierwszym miejscu jego listy wyborczej jest zawsze jedynym zwycięzcą.

System wyborczy, w którym występuje silny dyktator, nazywamy **silną dyktaturą**.

DEFINICJA 1.23. Decyzyjny system wyborczy C nazywamy **podatnym na manipulacje**, jeżeli istnieją: taki wyborca $i \in \{1, ..., n\}$, taki profil $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ oraz taka, różna od v_i, strategia v_i', dla których:

$$C((v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n))v_iC((v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)).$$

DEFINICJA 1.24. Decyzyjny system wyborczy C nazywamy **odpornym na manipulacje**, jeżeli dla żadnego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ i dla żadnego profilu $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ nie istnieje taka, różna od v_i, strategia v_i', że:

$$C((v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n))v_iC((v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)).$$

Innymi słowy, decyzyjny system wyborczy C jest odporny na manipulacje, jeżeli dla każdego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich i-niezmienników v i v' mamy: $C(v)v_iC(v')$ lub $C(v') = C(v)$.

DEFINICJA 1.25. System wyborczy C nazywamy **podatnym na manipulację przez optymistycznego i-tego wyborcę**, jeżeli istnieją: profil $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ oraz różna od v_i strategia v_i', dla których istnieje takie $x \in C((v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n))$, że dla wszystkich $y \in C(v)$ mamy xv_iy.

Strategię v_i będziemy w tym przypadku nazywać **szczerą strategią i-tego wyborcy**, a v_i' jego **nieszczerą strategią**.

Używając tej terminologii możemy powiedzieć, że system wyborczy jest podatny na manipulację przez optymistę, jeżeli dla tego systemu istnieje przynajmniej jeden profil, w którym pewien wyborca mógłby poprzez zmianę strategii ze szczerej na nieszczerą sprawić, że w zbiorze zwycięzców dla zmienionego profilu znajdzie się kandydat będący wyżej w jego szczerej strategii, tj. poprawić maksimum zbioru zwycięzców.

PRZYKŁAD 1.26. W Przykładzie 1.18 rozpatrywaliśmy sytuację, w której jeden z wyborców zmienił swoją strategię

$$\text{z } \boxed{\begin{array}{c} B \\ D \\ A \\ C \end{array}} \text{ na } \boxed{\begin{array}{c} D \\ B \\ A \\ C \end{array}},$$

w wyniku czego zbiór zwycięzców dla systemu punktów Bordy zmienił się z $\{C\}$ na $\{C, D\}$. Jeżeli więc uznamy pierwszą z powyższych strategii za szczerą, a drugą za nieszczerą, to powyższa zmiana jest przykładem manipulacji przez optymistycznego wyborcę.

DEFINICJA 1.27. System wyborczy C nazywamy **podatnym na manipulację przez pesymistycznego i-tego wyborcę**, jeżeli istnieją: profil $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ oraz różna od v_i strategia v_i', dla których istnieje takie $x \in C(v)$, że dla wszystkich $y \in C((v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n))$ mamy yv_ix.

Strategię v_i będziemy, jak wyżej, nazywać **szczerą strategią i-tego wyborcy**, a v_i' jego **nieszczerą strategią**.

Możemy więc powiedzieć, że system wyborczy jest podatny na manipulację przez pesymistę, jeżeli istnieje przynajmniej jeden profil, w którym pewien wyborca mógłby poprzez zmianę strategii ze szczerej na nieszczerą sprawić, że wszyscy zwycięzcy dla zmienionego profilu będą wyżej w jego szczerej strategii niż przynajmniej jeden zwycięzca przed zmianą, tj. poprawić minimum zbioru zwycięzców.

Przykład 1.28. Rozpatrujemy przypadek, w którym mamy czterech kandydatów (A, B, C, D) oraz 11 wyborców, których strategie przedstawia tabela poniżej.

5 osób	5 osób	1 osoba
A	D	C
B	C	A
C	A	B
D	B	D

Zbiorem zwycięzców dla systemu względnej większości jest tutaj zbiór $\{A, D\}$. Jeżeli ostatnia osoba zmieni swoją strategię

$$\text{z} \begin{array}{|c|} C \\ A \\ B \\ D \end{array} \text{na} \begin{array}{|c|} A \\ C \\ B \\ D \end{array},$$

to zbiór zwycięzców zmieni się na $\{A\}$. Jeżeli więc uznamy pierwszą z powyższych strategii za szczerą, a drugą za nieszczerą, to powyższa zmiana jest przykładem manipulacji przez pesymistycznego wyborcę.

Definicja 1.29. System wyborczy C nazywamy **odpornym na manipulację przez optymistę**, jeżeli dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, dla wszystkich i-niezmienniczych v i v' oraz dla każdego $x \in C((v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, ..., v_n))$ spełniona jest następująca alternatywa: istnieje takie $y \in C(v)$, że yv_ix, lub $x \in C(v)$.

Innymi słowy, system wyborczy jest odporny na manipulację przez optymistę, jeżeli dla wszystkich wyborców każda - inna niż szczera - strategia rezultuje zbiorem zwycięzców, z których każdy jest w jego szczerej strategii niewyżej niż pewien zwycięzca otrzymany w wyniku oddania szczerego głosu, czyli wtedy, gdy żaden wyborca nie może poprzez nieszczere głosowanie poprawić maksimum zbioru zwycięzców.

Powyższa definicja oznacza, że system C jest odporny na manipulację przez optymistę, jeżeli nie jest podatny na manipulację przez optymistę.

Definicja 1.30. System wyborczy C nazywamy **odpornym na manipulację przez pesymistę**, jeżeli dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, dla wszystkich i-niezmienniczych v i v' oraz dla każdego $x \in C(v)$ spełniona jest następująca alternatywa: istnieje takie $y \in C((v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, ..., v_n))$, że xv_iy, lub $x \in C((v_1, ..., v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, ..., v_n))$.

Inaczej mówiąc, system wyborczy jest odporny na manipulację przez pesymistę, gdy żaden wyborca nie może przez oddanie nieszczerego głosu sprawić, że ze zbioru zwycięzców zniknie najmniej pożądany przez niego kandydat.

System wyborczy C jest więc odporny na manipulację przez pesymistę, gdy nie jest podatny na manipulację przez pesymistę.

4. Własności

Niech dana będzie funkcja $\mathfrak{P} : V \ni v \to \mathfrak{P}^v$, gdzie $\mathfrak{P}^v$ jest przeciwsymetryczną relacją dwuargumentową na zbiorze A, którą będziemy nazywać **relacją preferencji społecznych** (związaną ze zbiorem kandydatów A).

Własność 1.31. Funkcja $\mathfrak{P}$ posiada własność **IIA** (jest **niezależna od nieistotnych (niezwiązanych) alternatyw**), jeżeli dla wszystkich $v, v' \in V$ i dla wszystkich $x, y \in A$ z tego, że v i v' są xy-bliźniacze i $x\mathfrak{P}^v y$, wynika, że $x\mathfrak{P}^{v'} y$.

Przykład 1.32. Pokażemy, że relacja preferencji społecznych pochodząca od systemu punktów Bordy nie jest niezależna od niezwiązanych alternatyw. Rozpatrujemy przypadek, w którym mamy trzech kandydatów (A, B, C) oraz pięciu wyborców, których strategie przedstawiają tabele poniżej.

1 osoba	2 osoby	3 osoby
C	A	B
A	B	A
B	C	C

1 osoba	2 osoby	3 osoby
C	A	B
A	B	C
B	C	A

Dla profilu v zilustrowanego w pierwszej tabeli otrzymujemy, że $A\mathfrak{P}^v B$, natomiast dla drugiego profilu v' otrzymujemy, że $B\mathfrak{P}^{v'} A$, pomimo tego, że v i v' są AB-bliźniacze.

Własność 1.33. Funkcja $\mathfrak{P}$ spełnia **zasadę Pareto**, jeżeli dla wszystkich $v \in V$, dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$ i dla wszystkich $x, y \in A$ z tego, że xv_iy, wynika $x\mathfrak{P}^v y$.

Przykład 1.34. Łatwo widać, że relacja preferencji społecznych pochodząca od metody Hare'a spełnia zasadę Pareto, ponieważ dla dowolnego profilu v jeżeli dla każdego $i = 1, ..., n$ mamy xv_iy dla pewnych $x, y \in A$, to kandydat y odpada od razu, a więc mamy $x\mathfrak{P}^v y$.

Przykład 1.35. Podobnie relacja preferencji społecznych pochodząca od metody Copelanda spełnia zasadę Pareto, ponieważ dla dowolnego profilu v jeżeli dla każdego $i = 1, ..., n$ mamy xv_iy dla pewnych $x, y \in A$, to jeśli w porównaniu z dowolnym innym kandydatem z y dostaje punkt, to x też, a ponadto x wygrywa w porównaniu z y. Stąd x otrzymuje więcej punktów niż y, a więc otrzymujemy $x\mathfrak{P}^v y$.

Przykład 1.36. Relacja preferencji społecznych pochodząca od systemu punktów Bordy również spełnia zasadę Pareto, ponieważ dla dowolnego profilu v jeżeli dla każdego $i = 1, ..., n$ mamy xv_iy dla pewnych $x, y \in A$, to od każdego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ kandydat x otrzymuje więcej punktów niż y, a więc x ma w sumie więcej punktów od y, czyli otrzymujemy $x\mathfrak{P}^v y$.

WŁASNOŚĆ 1.37. Funkcja $\mathfrak{P}$ posiada własność **przechodniości**, jeżeli dla każdego $v \in V$ i dla wszystkich $x, y, z \in A$ z tego, że $x\mathfrak{P}^v y\mathfrak{P}^v z$, wynika, że $x\mathfrak{P}^v z$.

WŁASNOŚĆ 1.38. Funkcja $\mathfrak{P}$ jest **niewetowalna**, jeżeli nie istnieje takie $i \in \{1, 2, ..., n\}$, żeby dla każdego $v \in V$ i dla wszystkich $x, y \in A$ z tego, że $xv_i y$ i $yv_j x$ dla każdego $j \neq i$, wynikało $\neg\, y\mathfrak{P}^v x$.

ROZDZIAŁ 2

Twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a

W tym rozdziale będziemy rozważać systemy wyborcze, które zawsze wyłaniają jednego zwycięzcę, ale nie dopuszczają remisów zarówno na poziomie wyniku wyborów jak i strategii wyborców. Zajmiemy się więc przypadkiem systemów decyzyjnych, w których wszystkie strategie wyborców są silnymi porządkami.

Twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a, które teraz przedstawimy, zostało niezależnie odkryte i opublikowane przez Gibbarda w pracy [**5**] z 1973 roku i przez Satterthwaite'a w pracy [**9**] z 1975 roku.

TWIERDZENIE 2.1 (TWIERDZENIE GIBBARDA-SATTERTHWAITE'A). *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Jeżeli system C jest decyzyjny, niewykluczający i odporny na manipulacje, to C jest silną dyktaturą.*

Wykażemy najpierw następującą słabszą wersję twierdzenia Gibbarda-Satterthwaite'a pochodzącą z pracy [**10**]:

TWIERDZENIE 2.2. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Jeżeli system C jest decyzyjny, odporny na manipulacje i spełnia zasadę Pareto, to C jest silną dyktaturą.*

Po pierwsze zauważmy, że powyższe twierdzenie jest rzeczywiście słabsze od Twierdzenia 2.1, ponieważ przy założeniu decyzyjności systemu wyborczego zasada Pareto implikuje niewykluczalność, co teraz udowodnimy.

LEMAT 2.3. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Jeżeli system C jest decyzyjny i spełnia zasadę Pareto, to każdy kandydat $x \in A$ jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu C.*

DOWÓD. Załóżmy nie wprost, że system C nie jest niewykluczający, tj. że istnieje taki kandydat $x \in A$, że $C(v) \neq \{x\}$ dla każdego profilu $v \in V$. Niech $w \in V$ będzie takim profilem, w którym dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich $y \in A \setminus \{x\}$ mamy xw_iy. Z zasady Pareto wynika, że dla każdego $y \neq x$ mamy $y \notin C(w)$. Z założenia również $x \notin C(w)$, a więc $C(w) = \varnothing$ - sprzeczność z decyzyjnością systemu C. $\square$

Po drugie zauważmy, że zasada Pareto implikuje również to, iż cały zbiór wyborców $\{1, ..., n\}$ jest zbiorem decyzyjnym.

Dowód Twierdzenia 2.2 będzie wynikał z lematów, które teraz przedstawimy. Zostały one opracowane na podstawie [**10**].

LEMAT 2.4. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Jeżeli system C jest decyzyjny i odporny na manipulacje, to C spełnia dolną monotoniczność dla singletonów.*

DOWÓD. Załóżmy nie wprost, że istnieje taki system wyborczy C, który jest jednocześnie decyzyjny, odporny na manipulacje i nie spełnia dolnej monotoniczności dla singletonów. Oznacza to, że istnieją takie profile v i v', taki wyborca i i tacy dwaj kandydaci x i y, że:

- profile v i v' są i-niezmiennicze;
- yv_ix i nie istnieje takie $z \in A \setminus \{x, y\}$, że yv_izv_ix;
- $y \notin C(v)$;
- profile v i v' są z_1z_2-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y\}$;
- profile v i v' są xz-bliźniacze dla wszystkich $z \in A \setminus \{y\}$;
- profile v i v' są yz-bliźniacze dla wszystkich $z \in A \setminus \{x\}$;
- xv'_iy (nie istnieje takie $z \in A \setminus \{x, y\}$, że $xv'_izv'_iy$);
- $C(v') \neq C(v)$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $C(v) = \{w\}$, gdzie $w \neq y$, a także, że $C(v') = \{v\}$, gdzie $v \neq w$. Zachodzi jeden z następujących trzech przypadków:

(1) vv_iw i vv'_iw.
Profile v i v' są i-niezmiennicze, a $C(v')v_iC(v)$ - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulacje.

(2) wv_iv i wv'_iv.
Profile v i v' są i-niezmiennicze, a $C(v)v'_iC(v')$ - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulacje.

(3) wv_iv i vv'_iw albo odwrotnie.
Z własności profili v i v' musi zachodzić równość $\{x, y\} = \{v, w\}$, a ponieważ $w \neq y$, to otrzymujemy, że $w = x$ i $v = y$. W takim razie otrzymujemy, że możliwy jest tylko przypadek vv_iw i wv'_iv, ale w tym przypadku mamy $C(v')v_iC(v)$ - ponownie sprzeczność z tym, że system C jest odporny na manipulacje.

Stąd otrzymujemy tezę. □

LEMAT 2.5. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Niech $X \subset \{1, ..., n\}$ i niech $a, b \in A$, $a \neq b$. Aby wykazać, że X jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b, wystarczy wykazać, że istnieje taki profil $v \in V$, dla którego:*

- *dla każdego $i \in X$ mamy av_ib,*
- *dla każdego $j \notin X$ mamy bv_ia,*
- *$C(v) = \{a\}$.*

DOWÓD. Załóżmy nie wprost, że istnieje profil v o powyższych własnościach, ale X nie jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b. Oznacza to, że istnieje taki profil $w \in V$, że dla każdego $i \in X$ mamy aw_ib, ale

$C(w) = \{b\}$. Korzystając z dolnej monotoniczności dla singletonów, dostajemy, że $C(w') = \{b\}$, gdzie w' jest takim profilem, że:

- $w'_i = w_i$ dla każdego $i \in X$;
- dla każdego $j \notin X$ strategie w'_j i w_j są ax-bliźniacze, bx-bliźniacze i x_1x_2-bliźniacze dla wszystkich $x, x_1, x_2 \in A \setminus \{a, b\}$;
- $bw'_j a$ dla każdego $j \notin X$.

Załóżmy bez straty ogólności, że $\#(A \setminus \{a, b\}) = m$. Zbudujmy następujące ciągi profili $(v^j)_{j=0}^m$ i $(w^j)_{j=0}^m$:

- $v^0 = v$, $w^0 = w'$;
- dla każdego $j = 1, ..., m$ istnieje dokładnie jeden taki kandydat $c_j \in A \setminus \{a, b\}$, że:
  - profile v^j i v^{j-1} są xy-bliźniacze dla wszystkich $x, y \in A \setminus \{c_j\}$;
  - profile w^j i w^{j-1} są xy-bliźniacze dla wszystkich $x, y \in A \setminus \{c_j\}$;
  - $xv_i^j c_j$ i $xw_i^j c_j$ dla każdego $x \neq c_j$ i wszystkich $i = 1, ..., n$;
- $\{c_j : j = 1, ..., m\} \cup \{a, b\} = A$.

Z dolnej monotoniczności dla singletonów wynika, że dla każdego $m = 1, ..., n$ mamy: $C(v^j) = \{a\}$ i $C(w^j) = \{b\}$. W szczególności więc $C(v^m) = \{a\}$ i $C(w^m) = \{b\}$. Z drugiej strony $v^m = w^m$ - sprzeczność. □

Lemat 2.6. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Niech $X \subset \{1, ..., n\}$ i niech kandydaci $a, b, c \in A$ będą parami różni. Załóżmy, że aXb. Niech $Y \subset X$ i $Z \subset X$ będą takie, że $Y \cup Z = X$ i $Y \cap Z = \varnothing$. Wtedy albo aYc, albo cZb.*

Dowód. Niech $v \in V$ będzie takim profilem, w którym:

- zbiór $\{a, b, c\}$ jest zbiorem faworytów,
- dla każdego $i \in Y$ mamy av_ibv_ic,
- dla każdego $i \in Z$ mamy cv_iav_ib,
- dla każdego $i \notin X$ mamy bv_icv_ia.

Z poprzedniego lematu wynika, że wystarczy wykazać, iż albo $C(v) = \{a\}$, albo $C(v) = \{c\}$.

Z zasady Pareto wynika, że $C(v) \subset \{a, b, c\}$. Ponadto $C(v) \neq \{b\}$, ponieważ X jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b i dla każdego $i \in X$ mamy av_ib. W takim razie albo $C(v) = \{a\}$ i wtedy z poprzedniego lematu otrzymujemy aYc, albo $C(v) = \{c\}$ i wtedy z poprzedniego lematu otrzymujemy cZb. □

Lemat 2.7. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Niech $X \subset \{1, ..., n\}$ i niech kandydaci $a, b, c \in A$ będą parami różni. Wtedy:*

(1) *z tego, że aXb, wynika, że aXc;*
(2) *z tego, że aXb, wynika, że cXb.*

Dowód. Dla żadnych dwóch kandydatów $x, y \in A$ nie może zachodzić $x\varnothing y$, ponieważ wtedy dla każdego profilu $v \in V$ mielibyśmy $C(v) \neq \{y\}$ - sprzeczność z niewykluczalnością systemu C. W szczególności więc $X \neq \varnothing$.

(1) Przyjmijmy $Y = X$ i $Z = \varnothing$. Z powyższej argumentacji wynika, że nie może zachodzić $c\varnothing b$, a więc na mocy poprzedniego lematu otrzymujemy aXc.
(2) Przyjmijmy $Y = \varnothing$ i $Z = X$. Z powyższej argumentacji wynika, że nie może zachodzić $a\varnothing c$, a więc na mocy poprzedniego lematu otrzymujemy cXb.

To kończy dowód. □

Lemat 2.8. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Niech $X \subset \{1, ..., n\}$ będzie zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b dla pewnych dwóch kandydatów $a, b \in A$. Wtedy X jest zbiorem decyzyjnym.*

Dowód. Wybierzmy dowolnych dwóch kandydatów $x, y \in A$. Pokażemy, że zbiór X jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami x i y. Zachodzi jeden z następujących czterech przypadków:

(1) $y \neq a$ i $y \neq b$.
Z poprzedniego lematu zastosowanego do kandydatów a, b, y otrzymujemy, że aXy. Jeżeli $x = a$, to mamy xXy. Przyjmijmy więc, że $x \neq a$. W takim razie możemy zastosować poprzedni lemat do kandydatów a, x, y, skąd otrzymujemy, że xXy.
(2) $x \neq a$ i $x \neq b$.
Z poprzedniego lematu zastosowanego do kandydatów a, b, x otrzymujemy, że xXb. Jeżeli $y = b$, to mamy xXy. Przyjmijmy więc, że $y \neq b$. W takim razie możemy zastosować poprzedni lemat do kandydatów b, x, y, skąd otrzymujemy, że xXy.
(3) $x = a$ i $y = b$.
Oczywiste, ponieważ aXb.
(4) $x = b$ i $y = a$.
Wybierzmy dowolnego kandydata $z \in A \setminus \{x, y\}$. Mamy aXb, czyli yXx. Z poprzedniego lematu zastosowanego trzykrotnie do kandydatów x, y, z otrzymujemy najpierw yXz, następnie xXz, a ostatecznie xXy.

Teza wynika z dowolności $x, y \in A$. □

Lemat 2.9. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Niech $X \subset \{1, ..., n\}$ będzie zbiorem decyzyjnym i niech $Y \subset X$ i $Z \subset X$ będą takie, że $Y \cup Z = X$ i $Y \cap Z = \varnothing$. Wtedy albo Y jest zbiorem decyzyjnym, albo Z jest zbiorem decyzyjnym.*

Dowód. Wybierzmy dowolne takie $a, b, c \in A$, że $a \neq b$, $b \neq c$ oraz $c \neq a$. Zbiór X jest zbiorem decyzyjnym, więc jest w szczególności zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i b, czyli aXb. Na mocy Lematu 2.6 oznacza to, że albo Y jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami a i c, albo Z jest zbiorem decyzyjnym nad kandydatami c i b. W pierwszym z tych przypadków Y jest zbiorem decyzyjnym na mocy Lematu 2.8, natomiast w drugim Z jest zbiorem decyzyjnym, również na mocy Lematu 2.8. □

LEMAT 2.10. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, niech $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że system C jest decyzyjny, spełnia zasadę Pareto i dolną monotoniczność dla singletonów. Jeżeli $X \subset \{1, ..., n\}$ jest zbiorem decyzyjnym, to istnieje taki wyborca $i \in X$, że $\{i\}$ jest zbiorem decyzyjnym.*

DOWÓD. Teza wynika bezpośrednio z poprzedniego lematu. □

Powyższe lematy zamykają dowód Twierdzenia 2.2, ponieważ z zasady Pareto wynika, że cały zbiór wyborców $\{1, ..., n\}$ jest zbiorem decyzyjnym, a więc na mocy powyższych lematów istnieje taki wyborca $i \in \{1, ..., n\}$, że $\{i\}$ jest zbiorem decyzyjnym, co w szczególności oznacza, że wyborca i jest silnym dyktatorem, czyli system wyborczy C jest silną dyktaturą.

DOWÓD TWIERDZENIA 2.1. Wystarczy wykazać, że jeżeli system wyborczy C jest decyzyjny, niewykluczający i odporny na manipulacje, to system C spełnia zasadę Pareto.

Załóżmy nie wprost, że system wyborczy C nie spełnia zasady Pareto. Oznacza to, że istnieje taki profil $v \in V$ i tacy kandydaci $x, y \in A$, że dla każdego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ mamy xv_iy, a mimo to $C(v) = \{y\}$. System C jest odporny na manipulacje, więc na mocy Lematu 2.4 system C spełnia dolną monotoniczność dla singletonów. Oznacza to, że możemy bez straty ogólności przyjąć, iż dla wszystkich $z \in A \setminus \{x, y\}$ mamy yv_iz dla każdego $i = 1, ..., n$. Stąd $\{x\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v.

Wiemy - ponieważ system wyborczy C jest niewykluczający - że istnieje taki profil $w \in V$, że $C(w) = \{x\}$. Zbudujemy teraz ciąg profili $(v^j)_{j=0}^n$ o następujących własnościach:

- $v^0 = v$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\}$ profile v^j i v^{j-1} są j-niezmiennicze, a $v^j_j = w_j$.

Oczywiście $v^n = w$. Zauważmy więc, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $C(v^{j_0}) = \{x\}$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, że $C(v^{j_1}) = \{x\}$ i $C(v^{j_1-1}) \neq \{x\}$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że profile v^{j_1} i v^{j_1-1} różnią się jedynie strategią wyborcy j_1 i $x = \overline{x}^{v_{j_1}}$. Stąd wyborca j_1 zmieniając strategię z $v^{j_1-1}_{j_1} = v_{j_1}$ na $v^{j_1}_{j_1} = w_{j_1}$ zmieniałby zwycięzcę na swojego jedynego faworyta, czyli zachodziłoby $C(v^{j_1})v^{j_1-1}_{j_1}C(v^{j_1-1})$ - sprzeczność z tym, że system C jest odporny na manipulacje. □

ROZDZIAŁ 3

Twierdzenie Duggana-Schwartza

1. Motywacja

Bliższe spojrzenie na założenia twierdzenia Gibbarda-Satterthwaite'a pozwala zauważyć, że są one bardzo restrykcyjne, w tym znaczeniu, że nie spełnia ich większość powszechnych systemów wyborczych. W celu wyjaśnienia przyczyny tego faktu przywołajmy znany Paradoks Condorceta.

Przykład 3.1 (Paradoks Condorceta[1]). Rozpatrujemy profil, w którym mamy trzech kandydatów (A, B i C) oraz trzech wyborców (1, 2 i 3), których strategie przedstawia poniższa tabela.

1	2	3
A	B	C
B	C	A
C	A	B

W tym przykładzie $\frac{2}{3}$ wyborców uważa, że A jest lepszy niż B, $\frac{2}{3}$ sądzi, że B jest lepszy niż C, i $\frac{2}{3}$ stawia C nad A. Jeżeli więc będziemy rozpatrywać systemy wyborcze, które są jednocześnie **anonimowe** (tj. takie, w których wszyscy wyborcy traktowani są tak samo w tym znaczeniu, że gdy dowolna dwójka spośród nich wymieni się głosami, to wynik wyborów nie ulegnie zmianie) i **neutralne** (tzn. traktujące tak samo wszystkich kandydatów), to nie jest możliwe wyłonienie jedynego zwycięzcy dla tego profilu.

Aby to zauważyć przyjmijmy bez straty ogólności, że jedynym zwycięzcą (wybranym w pewnym anonimowym i neutralnym systemie wyborczym) jest kandydat A. Jeżeli teraz wszyscy wyborcy w swoich głosach zamienią miejscami najpierw kandydatów A i B, a następnie B i C, to otrzymamy następujący profil:

1	2	3
C	A	B
A	B	C
B	C	A

.

Z neutralności wnioskujemy, że zwycięzcą w tym profilu powinien zostać kandydat C. Zauważmy jednak, że ten sam profil możemy otrzymać z pierwotnego w wyniku zamiany głosami najpierw wyborców 1 i 3, a następnie

[1] Jean Antoine Nicolas Caritat markiz de Condorcet (ur. 17 września 1743 r. w Ribemont, zm. 29 marca 1794 r. w Bourg-la-Reine) – francuski matematyk, ekonomista, filozof i polityk. Słynny paradoks zamieścił w swoim dziele *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* z 1785 roku. Paradoks był również niezależnie odkrywany przez innych autorów.

2 i 3, a więc (z anonimowości) zwycięzcą powinien pozostać kandydat A, czyli zwycięzców musi być co najmniej dwóch.

Powyższy paradoks wykazuje, że systemy wyborcze będące jednocześnie anonimowe i neutralne nie są decyzyjne, podczas gdy w rzeczywistości zazwyczaj używa się systemów, które traktują równo zarówno wszystkich wyborców jak i ogół kandydatów. Przykładowo system względnej większości, systemy punktowe, metody Hare'a, Coombsa i Copelanda nie wykluczają remisów.

Duggan i Schwartz w swojej pracy [**2**] zauważają jednak, że niedecyzyjne systemy wyborcze są zazwyczaj łączone z mechanizmami służącymi rozwiązaniu ewentualnych remisów w celu wyznaczenia jedynego zwycięzcy ze zbioru zwycięzców wyłonionego przez system wyborczy. Autorzy zwracają również uwagę na fakt, że twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a mówi niewiele o podatności na manipulacje takich procedur. Jeżeli mechanizm rozwiązywania remisów jest stochastyczny, to Twierdzenia 2.1 w ogóle nie da się zastosować. W przypadku, gdy jest on deterministyczny, musimy rozważyć, czy jest zależny od strategii wyborców. Jeżeli tak, to - o ile remis obejmuje co najmniej trzech kandydatów - możemy wnioskować o podatności na manipulacje tego mechanizmu, ale Twierdzenie 2.1 nie daje nam żadnych informacji na temat systemu wyborczego. Jedynie w sytuacji, gdy mechanizm rozwiązywania remisów jest deterministyczny i niezależny od list wyborczych, twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a pozwala nam wnioskować o podatności na manipulacje systemu wyborczego, ponieważ w tym przypadku jakakolwiek manipulacja może się odbyć jedynie na poziomie systemu, a więc jeżeli procedura podlega manipulacji, to system również.

W dalszej części rozdziału będziemy zakładać istnienie pewnego procesu rozstrzygającego remisy, o którym nie będziemy przyjmować żadnych szczególnych założeń. Zwycięzcę wyłonionego przez ten mechanizm będziemy nazywać ostatecznym zwycięzcą.

Do końca rozdziału będziemy również zakładać, że w strategiach wyborców nie występują remisy, tj. że wszystkie porządki wyborcze są silne. To założenie nie jest bardzo ograniczające, ponieważ większość używanych na świecie systemów wyborczych nie pozwala wyborcom na umiejscowienie dwóch lub większej liczby kandydatów na tej samej pozycji listy wyborczej.

2. Uogólnienie pojęć związanych z manipulacją

Aby móc przedstawić bardziej ogólne wyniki dla systemów wyborczych, które nie są decyzyjne, należy najpierw znaleźć sposób, który pozwoli nam dla każdego profilu $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ zbudować ciąg $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_n) \in (\mathcal{L}(\mathcal{P}(A)))^n$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, ..., n$ porządek wyborczy $\tilde{v}_i$ będziemy mogli uznać za zgodny w pewien sposób ze strategią v_i. W tym celu zdefiniujemy pewne funkcje.

Definicja 3.2. **Funkcją użyteczności** i-tego wyborcy nazywamy dowolną funkcję $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Reprezentatywną funkcją użyteczności i-tego wyborcy dla profilu v nazywamy każdą taką funkcję użyteczności u_i, że dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi: $u_i(x) > u_i(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy xv_iy.

PRZYKŁAD 3.3. Przypomnijmy sobie jeden z profili, które rozpatrywaliśmy w Przykładzie 1.5:

1	2	3	4
A	B	B	C
B	A	C	B
C	C	A	A

.

Reprezentatywna funkcja użyteczności u_1 wyborcy 1 dla tego profilu może być określona następująco: $u_1(A) = 1$, $u_1(B) = 0$, $u_1(C) = -1$. Dla wyborcy 2 możemy zdefiniować jego reprezentatywną funkcję użyteczności u_2 na przykład tak: $u_2(A) = \frac{1}{2}$, $u_2(B) = 1$, $u_2(C) = 0$. Reprezentatywna funkcja użyteczności u_3 wyborcy 3 może być następująca: $u_3(A) = -10$, $u_3(B) = 2$, $u_3(C) = -7$. Natomiast następująca funkcja u_4: $u_4(A) = 0$, $u_4(B) = 1$, $u_4(C) = -3$ jest funkcją użyteczności wyborcy 4, ale nie jest reprezentatywna.

DEFINICJA 3.4. **Funkcją prawdopodobieństw i-tego wyborcy** nazywamy dowolną[2] funkcję $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \ni (v, X, x) \longrightarrow p_i(v, X, x) \in [0, 1]$.

Funkcja prawdopodobieństw i-tego wyborcy może być interpretowana jako przyporządkowanie dowolnej trójce (v, X, x) prawdopodobieństwa, z jakim, zdaniem i-tego wyborcy, kandydat x zostanie wybrany ostatecznym zwycięzcą w profilu v, w którym zbiorem zwycięzców jest X.

Oczywiście $p_i(v, \{x\}, x) = 1$.

PRZYKŁAD 3.5. Funkcja prawdopodobieństw wyborcy 1 z poprzedniego przykładu może przyjmować następujące wartości dla rozpatrywanego tam profilu v: $p_1(v, \{A, B\}, A) = \frac{1}{2}$, $p_1(v, \{A, B\}, B) = \frac{1}{2}$, $p_1(v, \{A, C\}, A) = \frac{1}{5}$, $p_1(v, \{A, C\}, C) = \frac{4}{5}$. Oznacza to, że wyborca 1 uważa, że jeżeli w profilu v dojdzie do remisu pomiędzy kandydatami A i B, to będą oni mieli równe szanse na zostanie ostatecznym zwycięzcą, jednakże jeżeli dojdzie do remisu pomiędzy kandydatami A i C, to C będzie miał czterokrotnie większe szanse od A na ostateczne zwycięstwo.

UWAGA 3.6. Nie zakładamy, że dla wszystkich $i, j = 1, ..., n$ mamy $p_i(v, X, x) = p_j(v, X, x)$ dla każdej trójki $(v, X, x) \in (V, \mathcal{P}(A), A)$, ponieważ funkcje prawdopodobieństw wyborców wyrażają jedynie ich przewidywania na temat sposobu, w jaki remisy zostaną rozstrzygnięte.

DEFINICJA 3.7. **Oczekiwaną użytecznością i-tego wyborcy** zbioru X w profilu v z funkcją prawdopodobieństw p_i nazywamy wartość

$$\bar{u}_i^v(X) := \sum_{x \in X} p_i(v, X, x) u_i(x).$$

Oczekiwana użyteczność i-tego wyborcy w profilu v to funkcja

$$\bar{u}_i^v\colon \mathcal{P}(A) \ni X \to \bar{u}_i^v(X) \in \mathbb{R}.$$

Na zbiorze $\mathbb{R}$ mamy naturalny liniowy porządek, więc oczekiwana użyteczność i-tego wyborcy indukuje porządek wyborczy $\tilde{v}_i$ na zbiorze $\mathcal{P}(A)$ w ten sposób, że $X \tilde{v}_i Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{u}_i^v(X) > \bar{u}_i^v(Y)$ dla dowolnych $X, Y \subset A$. Dla każdego $i = 1, ..., n$ porządek ten możemy uznać za zgodny ze strategią v_i.

---

[2] Patrz jednak Definicja 3.8.

Wprowadzenie powyższego porządku wyborczego pozwala nam w naturalny sposób uogólnić pojęcie manipulacji na niedecyzyjne systemy wyborcze.

Definicja 3.8. Niech p_i $(i = 1, ..., n)$ będzie dowolną taką funkcją prawdopodobieństw i-tego wyborcy, która dla każdego $x \in A$ i dla wszystkich $X \subset A$ spełnia własności:

- $\sum_{x \in A} p_i(v, X, x) = 1$,
- $p_i(v, X, \overline{y}^{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, \underline{y}_{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, z) = 0$ dla wszystkich $z \notin X$.

Efektywny system wyborczy C nazywamy **podatnym na manipulacje**, jeżeli istnieją: wyborca i, i-niezmienniki v i v' oraz reprezentatywna funkcja użyteczności i-tego wyborcy u, które spełniają następujący warunek:

$$\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v)).$$

Powyższa definicja koresponduje z definicją podatności na manipulacje decyzyjnych systemów wyborczych, ponieważ warunek $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$ oznacza, że $C(v')\tilde{v}_i C(v)$, a więc efektywny system wyborczy jest podatny na manipulacje, gdy istnieje wyborca, który poprzez zmianę swojego głosu wywołuje zmianę zbioru zwycięzców na lepszy w porządku $\tilde{v}_i$, tj. na taki, który jest lepszy w sensie porządku jego strategii. Oczywiście w przypadku, gdy system wyborczy wyłania pojedynczego zwycięzcę, powyższa definicja pokrywa się z Definicją 1.23.

Założenia $p_i(v, X, \overline{y}^{v_i}|_X) > 0$ i $p_i(v, X, \underline{y}_{v_i}|_X) > 0$ oznaczają, że każdy wyborca zakłada, iż najlepszy i najgorszy - wg porządku na jego liście wyborczej - kandydat z X mają obaj niezerowe szanse na zostanie wybranym ostatecznym zwycięzcą.

Definicja 3.9. Niech p_i będzie taką jak w Definicji 3.8 funkcją prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1, ..., n$. System wyborczy C nazywamy **odpornym na manipulacje**, jeżeli dla żadnego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ oraz żadnych i-niezmienników v i v' nie istnieje taka reprezentatywna funkcja użyteczności i-tego wyborcy u, dla której $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$.

3. Pierwsze twierdzenie Duggana-Schwartza

Pierwsze twierdzenie Duggana-Schwartza zostało opublikowane w pracy [**2**] z 1992 r.

Twierdzenie 3.10 (Pierwsze twierdzenie Duggana-Schwartza). *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym, a $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0, 1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1, ..., n$. Następujące sześć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
PROB: *Dla każdego $i = 1, ..., n$ oraz dla dowolnych $v \in V$, $X \subset A$ i $x \in A$ funkcja prawdopodobieństw i-tego wyborcy spełnia następujące warunki:*

- $\sum_{x\in A} p_i(v, X, x) = 1$,
- $p_i(v, X, \overline{y}^{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, \underline{y}_{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, z) = 0$ *dla wszystkich* $z \notin X$.

CiSov: *System C jest niewykluczający.*
$\neg$ **D:** *W C nie istnieje słaby dyktator.*
$\neg$ **S:** *System C jest odporny na manipulacje.*[3]

Powyższe twierdzenie można uznać za bezpośrednie uogólnienie Twierdzenia 2.1 na systemy niedecyzyjne.

Rozpatrzmy następujący warunek:

MOP: System C jest odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę.[4]

Lemat 3.11. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym i niech dla dowolnego $i = 1, ..., n$ funkcja $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0, 1]$ będzie funkcją prawdopodobieństw i-tego wyborcy. Jeżeli p_i spełnia warunek* ***PROB*** *dla każdego $i = 1, ..., n$, to warunki $\neg$* ***S*** *i* ***MOP*** *są równoważne.*

Dowód. Przyjmijmy, że system wyborczy C i funkcje prawdopodobieństw p_i $(i = 1, ..., n)$ spełniają warunki $\neg$ **S** i **PROB**.

Załóżmy nie wprost, że system C jest podatny na manipulację przez pesymistycznego i-tego wyborcę dla pewnego $i = 1, ..., n$. Oznacza to, że istnieją: profil $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ oraz różna od v_i strategia v_i', dla których istnieje takie $x \in C(v)$, że dla wszystkich $y \in C(v')$ zachodzi yv_ix, gdzie $v' := (v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n)$. W szczególności $\underline{y}'_{v_i}|_{C(v')} v_i \underline{y}_{v_i}|_{C(v)}$. Niech $p := p_i(v, C(v), \underline{y}_{v_i}|_{C(v)})$. Z warunku **PROB** wiemy, że $p > 0$. Niech u będzie dowolną reprezentatywną funkcją użyteczności i-tego wyborcy dla profilu v. Zachodzą następujące nierówności:

$$u(\overline{y}^{v_i}) \geqslant u(\underline{y}'_{v_i}|_{C(v')}) > u(\underline{y}_{v_i}|_{C(v)}).$$

Dla pewnych u zachodzi więc $u(\underline{y}'_{v_i}|_{C(v')}) > pu(\underline{y}_{v_i}|_{C(v)}) + (1-p)u(\overline{y}^{v_i})$. Skoro $u(\underline{y}'_{v_i}|_{C(v')}) \leqslant u(x)$ dla każdego $x \in C(v')$, to $\bar{u}_i^v(C(v')) \geqslant u(\underline{y}'_{v_i}|_{C(v')})$, czyli

[3] Pochodzenie skrótów:

- **F3A**: F pochodzi od *finite* (ang. skończony), a 3 od minimalnej mocy zbioru A;
- **CH**: od angielskiego pojęcia *choice set* oznaczającego zbiór zwycięzców;
- **PROB**: od *probability* (ang. prawdopodobieństwo);
- **CiSov**: od angielskiego pojęcia *citizens' sovereignty*, którym Duggan i Schwartz określają niewykluczalność;
- $\neg$ **D**: od *dictator* (ang. dyktator);
- $\neg$ **S**: od angielskiego pojęcia *strategy freedom* określającego odporność na głosowanie strategiczne.

[4] Pochodzenie skrótu:

- **MOP**: M pochodzi od *manipulation* (ang. manipulacja), O od *optimist* (ang. optymista), a P od *pessimist* (ang. pesymista).

$$\bar{u}_i^v(C(v')) > pu(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}) + (1-p)u(\overline{y}^{v_i}).$$

Jednocześnie jest oczywiste, że

$$\bar{u}_i^v(C(v)) \leqslant pu(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}) + (1-p)u(\overline{y}^{v_i}).$$

Otrzymaliśmy więc nierówność $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$ - sprzeczność z założeniem, że C spełnia $\neg$ **S**.

Teraz załóżmy nie wprost, że system wyborczy C jest podatny na manipulację przez optymistycznego i-tego wyborcę ($i \in \{1, ..., n\}$). To oznacza, że istnieją: profil $v = (v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$ oraz różna od v_i strategia v_i', dla których istnieje takie $x \in C(v')$, że dla wszystkich $y \in C(v)$ zachodzi xv_iy, gdzie $v' := (v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n)$. W szczególności zatem $\overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')} v_i \overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}$. Niech $p := p_i(v, C(v'), \overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')})$. Z warunku **PROB** wiemy, że $p > 0$. Niech u będzie dowolną reprezentatywną funkcją użyteczności i-tego wyborcy dla profilu v. Zachodzą następujące nierówności:

$$u(\overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')}) > u(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}) \geqslant u(\underline{y}_{v_i}).$$

Dla pewnych u zachodzi więc $u(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}) < pu(\overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')}) + (1-p)u(\underline{y}_{v_i})$. Skoro $u(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)})) \geqslant u(x)$ dla każdego $x \in C(v)$, to $\bar{u}_i^v(C(v)) \leqslant u(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)})$, czyli

$$\bar{u}_i^v(C(v)) < pu(\overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')}) + (1-p)u(\underline{y}_{v_i}).$$

Jednocześnie jest oczywiste, że

$$\bar{u}_i^v(C(v')) \geqslant pu(\overline{y'}^{v_i}\big|_{C(v')}) + (1-p)u(\underline{y}_{v_i}).$$

Otrzymaliśmy więc nierówność $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$ - sprzeczność z założeniem, że C spełnia $\neg$ **S**.

W celu pokazania, że z **MOP** wynika $\neg$ **S**, załóżmy nie wprost, że system wyborczy C nie spełnia warunku $\neg$ **S**. Zdefiniujmy dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ funkcję prawdopodobieństw $\tilde{p}_i$ następująco:

- $\tilde{p}_i(v, C(v), \overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}) = \tilde{p}_i(v, C(v), \underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}) = \frac{1}{2}$;
- $\tilde{p}_i(v, C(v'), \overline{y}^{v_i}\big|_{C(v')}) = \tilde{p}_i(v, C(v'), \underline{y}_{v_i}\big|_{C(v')}) = \frac{1}{2}$;
- $\tilde{p}_i(v, C(v), x) = 0$ dla $x \neq \overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}, x \neq \underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}$;
- $\tilde{p}_i(v, C(v'), x) = 0$ dla $x \neq \overline{y}^{v_i}\big|_{C(v')}, x \neq \underline{y}_{v_i}\big|_{C(v')}$;
- $\tilde{p}_i(v, X, x) = p_i(v, X, x)$ dla $X \notin \{C(v), C(v')\}$ (dla każdego $v \in V$).

Funkcja $\tilde{p}_i$ spełnia warunek **PROB**. Z założenia, że C nie spełnia warunku $\neg$ **S**, otrzymujemy, że istnieją: $i \in \{1, ..., n\}$, i-niezmienniki v i v' oraz reprezentatywna funkcja użyteczności i-tego wyborcy u, dla których $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$. Z drugiej strony mamy

$$\bar{u}_i^v(C(v')) = \tfrac{1}{2}\Big(u_i(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v')}) + u_i(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v')})\Big)$$
$$\text{i } \bar{u}_i^v(C(v)) = \tfrac{1}{2}\Big(u_i(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}) + u_i(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)})\Big),$$

a ponieważ system C jest odporny na manipulacje przez optymistę i pesymistę, to $u_i(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v)}) \geqslant u_i(\overline{y}^{v_i}\big|_{C(v')})$ i $u_i(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}) \geqslant u_i(\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v')})$ - sprzeczność z tym, że $\bar{u}_i^v(C(v')) > \bar{u}_i^v(C(v))$. □

Z powyższego lematu wynika, że Twierdzenie 3.10 można równoważnie sformułować w następujący sposób:

TWIERDZENIE 3.12. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1,...,n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Następujące pięć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
CiSov: *System wyborczy C jest niewykluczający.*
$\neg$ **D:** *W C nie istnieje słaby dyktator.*
MOP: *System C jest odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę.*[5]

W powyższym twierdzeniu nie korzystamy ze zbudowanego w poprzednim podrozdziale porządku na zbiorze $(\mathcal{L}(\mathcal{P}(A)))^n$, jednak wykorzystanie pojęć manipulacji przez optymistycznego i-tego wyborcę i manipulacji przez pesymistycznego i-tego wyborcę również pozwala wprowadzić pewne dwa porządki w zbiorze $\mathcal{P}(A)$. Pierwszy z nich, który nazwiemy porządkiem optymistycznym $\check{v}_i$ $(i = 1,...,n)$, możemy zdefiniować następująco: $X\check{v}_iY$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\overline{x}^{v_i}\big|_X)v_i(\overline{y}^{v_i}\big|_Y)$ dla dowolnych $X, Y \subset A$. Drugi porządek - nazwiemy go pesymistycznym $\hat{v}_i$ - zdefiniujemy w ten sposób, że dla dowolnych $X, Y \subset A$ mamy $X\hat{v}_iY$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\underline{x}_{v_i}\big|_X)v_i(\underline{y}_{v_i}\big|_Y)$.

Używając tej terminologii możemy powiedzieć, że system wyborczy jest odporny na manipulacje przez optymistów i pesymistów, jeżeli dla żadnego wyborcy i oraz żadnych i-niezmienników v i v' nie zachodzi ani $C(v')\check{v}_iC(v)$, ani $C(v')\hat{v}_iC(v)$. W takim razie Twierdzenie 3.12 możemy równoważnie sformułować następująco:

TWIERDZENIE 3.13. *Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, z których każdy jest potencjalnym zwycięzcą, a $\{1,...,n\}$ będzie zbiorem wyborców. Wtedy w każdym takim efektywnym*

---

[5]Ta wersja pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza została opublikowana przez Taylora w jego pracy [**11**] z 2002 roku w następującej formie:

TWIERDZENIE. Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, $\{1,...,n\}$ zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Zakładamy, że C jest efektywny. Jeżeli ponadto C jest niewykluczający i odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę, to dla systemu C istnieje przynajmniej jeden słaby dyktator.

systemie wyborczym C, że dla żadnego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ oraz dla żadnych i-niezmienników v i v' nie zachodzi ani $C(v')\check{v}_i C(v)$, ani $C(v')\hat{v}_i C(v)$, istnieje przynajmniej jeden słaby dyktator.

Przedstawimy teraz dowód pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza pochodzący z pracy [**2**]. Do tego celu będą nam potrzebne następujące cztery lematy:

Lemat 3.14. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców i niech $\mathfrak{P} : V \ni v \to \mathfrak{P}^v$ będzie dowolną funkcją przyporządkowującą profilom z V dwuargumentowe relacje na zbiorze A. Następujące sześć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

3A: *Zbiór A jest co najmniej trzyelementowy.*
SoPREF: *Funkcja $\mathfrak{P}$ jest relacją preferencji społecznych (tj. wszystkie przyporządkowywane relacje są przeciwsymetryczne).*
IIA: *Funkcja $\mathfrak{P}$ jest niezależna od nieistotnych alternatyw.*
PARETO: *Funkcja $\mathfrak{P}$ spełnia zasadę Pareto.*
$\neg$ **B:** *Funkcja $\mathfrak{P}$ jest niewetowalna.*
TRANS: *Funkcja $\mathfrak{P}$ posiada własność przechodniości.*[6]

Powyższy lemat pozostawiamy bez dowodu. Jego dowód można znaleźć między innymi w pracy [**6**] autorstwa Andreu Mas-Colella i Hugo Sonnenscheina.

Lemat 3.15. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym i niech funkcje $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0, 1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1, ..., n$. Zakładamy, że funkcje p_i spełniają warunek **PROB** dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, a system C spełnia warunek $\neg$ **S**. Wtedy dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, dla każdego $x \in A$ i dla wszystkich i-niezmienników v i v' z tego, że $x \in C(v)$ wynika, że:*

(1) *$x \in C(v')$ lub istnieje takie $y \in C(v')$, że xv_iy;*
(2) *$x \in C(v')$ lub istnieje takie $y \in C(v')$, że $yv_i'x$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że (1) nie zachodzi. To oznacza, że

$$\underline{y'}_{v_i}\big|_{C(v')} v_i \underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)}.$$

Zwróćmy jednak uwagę, że - na mocy Lematu 3.11 - system wyborczy C jest odporny na manipulację przez pesymistę, czyli

$$\underline{y}_{v_i}\big|_{C(v)} v_i \underline{y'}_{v_i}\big|_{C(v')}.$$

[6] Pochodzenie skrótów:

- **3A**: 3 pochodzi od minimalnej mocy zbioru A;
- **SoPREF**: od angielskiego pojęcia *social preference relation* oznaczającego relację preferencji społecznych;
- **IIA**: od angielskiego pojęcia *independence of irrelevant alternatives* oznaczającego niezależność od niezwiązanych alternatyw;
- **PARETO**: od angielskiego pojęcia *Pareto condition* oznaczającego zasadę Pareto;
- $\neg$ **B**: od angielskiego pojęcia *nonblocker*, którym Duggan i Schwartz określają niewetowalność;
- **TRANS**: od *transitive* (ang. przechodni).

Mamy więc

$$\underline{y'}_{v_i}\Big|_{C(v')} v_i \underline{y}_{v_i}\Big|_{C(v)} v_i \underline{y'}_{v_i}\Big|_{C(v')}$$

- sprzeczność. Stąd otrzymujemy (1).

Teraz załóżmy nie wprost, że (2) nie zachodzi. To z kolei oznacza, że

$$\overline{z}^{v'_i}\Big|_{C(v)} v'_i \overline{z'}^{v'_i}\Big|_{C(v')}.$$

System wyborczy C jest - ponownie na mocy Lematu 3.11 - odporny na manipulację przez optymistę, co oznacza, że

$$\overline{z'}^{v'_i}\Big|_{C(v')} v'_i \overline{z}^{v'_i}\Big|_{C(v)}.$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$\overline{z}^{v'_i}\Big|_{C(v)} v'_i \overline{z'}^{v'_i}\Big|_{C(v')} v'_i \overline{z}^{v'_i}\Big|_{C(v)}.$$

- sprzeczność. Stąd otrzymujemy (2). □

LEMAT 3.16. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1,...,n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym i niech funkcje $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0,1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1,...,n$. Zakładamy, że funkcje p_i spełniają warunek **PROB** dla każdego $i \in \{1,...,n\}$, a system C spełnia warunki **CH** i $\neg$ **S**. Wybierzmy dowolnego kandydata $x \in A$ i dowolny profil $v \in V$, takie, że $C(v) = \{x\}$. Niech $v' \in V$ będzie takim profilem, że dla każdego $i \in \{1,...,n\}$ i dla każdego $y \in A$ z tego, że yv'_ix, wynika, że yv_ix. Wtedy $C(v') = \{x\}$.*

DOWÓD. Zbudujmy ciąg profili $(v^i)_{i=0}^n$ o następujących własnościach:

- $v^0 = v$;
- profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze dla każdego $i = 1,...,n$;
- $v^i_i = v'_i$ dla każdego $i = 1,...,n$.

Oczywiście $v^n = v'$.

Zauważmy teraz, że wystarczy wykazać, iż teza zachodzi dla dowolnych i-niezmienniczych profili w i w' o tej własności, że $C(w) = \{x\}$ dla pewnego $x \in A$ i dla każdego $y \in A$ z tego, że yw'_ix, wynika, że yw_ix (dla każdego $i \in \{1,...,n\}$). Będzie to bowiem oznaczało, że $C(v^1) = \{x\}$, a stąd - na mocy zasady indukcji matematycznej - $C(v^i) = \{x\}$ dla każdego $i = 1,...,n$, czyli w szczególności otrzymamy, że $C(v') = \{x\}$.

Wybierzmy więc dowolne $i \in \{1,...,n\}$ i takież profile w i w'. Załóżmy najpierw nie wprost, że istnieje takie $z \in C(w')$, że zw_ix. Wtedy z Lematu 3.15 otrzymujemy, że $z \in C(w)$ lub istnieje takie $z' \in C(w)$, że $z'w_iz$ - niemożliwe, bo $C(w) = \{x\}$. Teraz załóżmy nie wprost, że istnieje takie $z \in C(w')$, że xw_iz. Z założenia oznacza to, że również xw'_iz. Ponownie korzystamy z Lematu 3.15 i otrzymujemy z niego, że $z \in C(w)$ lub istnieje takie $z' \in C(w)$, że zw'_iz' - to również jest niemożliwe, ponieważ $C(w) = \{x\}$. Stąd wiemy, że $y \notin C(w')$ dla żadnego kandydata $y \neq x$. Z efektywności systemu C otrzymujemy więc, że $C(w') = \{x\}$. □

Lemat 3.17. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1,...,n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym i niech funkcje $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0,1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1,...,n$. Zakładamy, że funkcje p_i spełniają warunek **PROB** dla każdego $i \in \{1,...,n\}$, a system C spełnia warunki **CH**, **CiSov** i $\neg$ **S**. Jeżeli $X \subset A$ jest zbiorem faworytów dla pewnego profilu $v \in V$, to $\varnothing \neq C(v) \subset X$.*

Dowód. Z efektywności systemu C wiemy, że $\varnothing \neq C(v) \subset A$. Wybierzmy dowolne $x \in X$. Niech v^x będzie takim profilem, w którym $\{x\}$ jest zbiorem faworytów. Każdy kandydat jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu C, więc istnieje profil v', dla którego $C(v') = \{x\}$. Z Lematu 3.16 otrzymujemy więc, że $C(v^x) = \{x\}$. Zbudujmy ciąg profili $(v^i)_{i=0}^n$ o następujących własnościach:

- $v^0 = v$;
- profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze dla każdego $i = 1,...,n$;
- $v_i^i = v_i^x$ dla każdego $i = 1,...,n$.

Oczywiście $v^n = v^x$. Profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze dla dowolnego $i \in \{1,...,n\}$. Z Lematu 3.15 dostajemy więc, że dla każdego $i = 1,...,n$ zachodzi następująca implikacja:

$$(\star) \qquad \begin{array}{l} \text{z tego, że } y \in C(v) \text{ (dla dowolnego } y \in A), \text{ wynika,} \\ \text{że } y \in C(v^x) \text{ lub istnieje takie } z \in C(v^x), \text{ że } yv_iz. \end{array}$$

Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1,...,n\}$, dla każdego $x' \in X$ i dla wszystkich $y' \notin X$ zachodzi $x'v_iy'$, ponieważ X jest zbiorem faworytów dla profilu v. Stąd i z $(\star)$ wynika, że gdyby $C(v) \cap (A \setminus X) \neq \varnothing$, to również $C(v^x) \cap (A \setminus X) \neq \varnothing$ - niemożliwe, ponieważ $C(v^x) = \{x\}$, gdzie $x \in X$. Stąd otrzymujemy, że $C(v) \cap (A \setminus X) = \varnothing$, czyli (z efektywności systemu C) mamy $C(v) \subset X$. $\square$

Dowód twierdzenia 3.10. Załóżmy nie wprost, że wszystkie sześć warunków (tj. **F3A, CH, PROB, CiSov,** $\neg$ **D** i $\neg$ **S**) jest jednocześnie spełnionych. Zdefiniujmy funkcję $\mathfrak{R} : V \ni v \to \mathfrak{R}^v$ następująco:
dla dowolnych kandydatów $x, y \in A$ i dla dowolnego profilu $v \in V$ mamy $x\mathfrak{R}^v y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq y$ i $C(v') = \{x\}$ dla każdego profilu v' spełniającego następujące własności:

$$(\star) \qquad \begin{array}{l} \text{profile } v \text{ i } v' \text{ są } xy\text{-bliźniacze,} \\ \{x, y\} \text{ jest zbiorem faworytów dla profilu } v'. \end{array}$$

Zauważmy, że warunek **F3A** jest mocniejszy od warunku **3A**, więc z założenia **3A** jest spełniony. Wykażemy, że zdefiniowana powyżej funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunki **SoPREF, IIA, PARETO,** $\neg$ **B** i **TRANS**, co jest niemożliwe na mocy Lematu 3.14.

Łatwo widać, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek **SoPREF**. Weźmy bowiem dowolne takie $x, y \in A$ i $v \in V$, dla których $x\mathfrak{R}^v y$. Z definicji funkcji $\mathfrak{R}$ oznacza to, że $x \neq y$ i $C(v') = \{x\}$ dla każdego profilu v' o własnościach $(\star)$. Stąd dla każdego takiego profilu v' mamy $C(v') \neq \{y\}$, czyli $\neg\, y\mathfrak{R}^v x$, a więc relacja $\mathfrak{R}^v$ jest przeciwsymetryczna. Z dowolności profilu v otrzymujemy więc, że zdefiniowana przez nas funkcja $\mathfrak{R}$ jest relacją preferencji społecznych.

Równie łatwo wykażemy, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek **IIA**. Wybierzmy dowolne takie $v_1 \in V$ i $x, y \in A$, dla których $x\mathfrak{R}^{v_1}y$. Weźmy dowolny profil $v_2 \in V$ xy-bliźniaczy z v_1. To, że $x\mathfrak{R}^{v_1}y$, jest równoważne temu, że $x \neq y$ i $C(v') = \{x\}$ dla każdego takiego profilu v', dla którego zbiorem faworytów jest $\{x, y\}$ i który jest xy-bliźniaczy z v_1. Oczywiście xy-bliźniaczość jest przechodnia, w związku z czym każdy taki profil v' jest również xy-bliźniaczy z v_2, a stąd $x\mathfrak{R}^{v_2}y$.

Teraz wykażemy, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek **PARETO**. Niech $v \in V$ będzie takim profilem, w którym dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ mamy xv_iy dla pewnych kandydatów $x, y \in A$. Stąd oczywiście $x \neq y$. Aby udowodnić, że $x\mathfrak{R}^vy$, musimy wykazać, że $C(v') = \{x\}$ dla każdego profilu v' o własnościach ($\star$). Z ($\star$) i z tego, że xv_iy dla każdego $i = 1, ..., n$, otrzymujemy, że $\{x\}$ jest zbiorem faworytów dla każdego takiego profilu v'. Na mocy Lematu 3.17 oznacza to, że $\varnothing \neq C(v') \subset \{x\}$, czyli $C(v') = \{x\}$ dla każdego profilu v' o własnościach ($\star$), co z kolei oznacza, że $x\mathfrak{R}^vy$.

W dalszej części dowodu będziemy wykorzystywać następującą własność funkcji $\mathfrak{R}$:

(#) dla dowolnego profilu $v \in V$ i dla dowolnych dwóch kandydatów x i y z tego, że $C(v) = \{x\}$, wynika, że $x\mathfrak{R}^vy$.

Funkcja $\mathfrak{R}$ posiada własność (#), ponieważ z tego, że $C(v) = \{x\}$, na mocy Lematu 3.16 wynika, że $C(v') = \{x\}$ dla każdego profilu $v' \in V$ posiadającego własność ($\star$).

Wykazanie, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek $\neg$ **B**, będzie od nas wymagało nieco więcej pracy. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $i \in \{1, ..., n\}$, że dla każdego $v \in V$ i dla wszystkich $x, y \in A$ z tego, że xv_iy podczas gdy yv_jx dla każdego $j \neq i$, wynika, że $\neg\ y\mathfrak{R}^vx$. Naszym celem będzie wykazanie, że wynika stąd, iż wyborca i jest słabym dyktatorem dla systemu wyborczego C, co da nam sprzeczność z tym, że system C spełnia warunek $\neg$ **D**.

W tym celu załóżmy nie wprost, że istnieje taki profil $v \in V$, w którym xv_iy dla pewnego $x \in A$ i wszystkich $y \neq x$, ale $x \notin C(v)$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że kandydat $y \neq x$ jest na drugim miejscu listy wyborczej v_i, tj. że xv_iy i dla każdego $z \in A \setminus \{x, y\}$ mamy yv_iz. Zdefiniujmy profil $v' \in V$ w następujący sposób:

- $v'_i = v_i$;
- profile v'_j i v_j są z_1z_2-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y\}$ i dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$;
- yv'_jz dla każdego $z \neq y$ i dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$;
- zv'_jx dla każdego $z \neq x$ i dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$.

Aby wykazać, że $x \notin C(v')$, zbudujmy następujący ciąg profili $(v^i)_{i=0}^n$:

- $v^0 = v$;
- profile v^j i v^{j-1} są j-niezmiennicze, a $v^j_j = v'_j$ dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\}$.

Oczywiście $v^n = v'$. Załóżmy, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $x \in C(v^{j_0})$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, $j_1 \neq i$, że $x \in C(v^{j_1})$ i $x \notin C(v^{j_1-1})$. Zauważmy jednak, że profile v^{j_1} i v^{j_1-1} są j_1-niezmiennicze i $x = \underline{x}^{j_1}_{j_1} = \underline{x}'_{j_1}$.

Na mocy Lematu 3.15 oznacza to, że $x \in C(v^{j_1-1})$ - sprzeczność z założeniem. To z kolei oznacza, że $x \notin C(v^j)$ dla żadnego $j = 1, ..., n$, czyli w szczególności $x \notin C(v')$. Teraz zdefiniujmy profil v^y następująco:

- profile v' i v^y są i-niezmiennicze;
- strategie v_i^y i v_i' są z_1z_2-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y\}$;
- $yv_i^y x$;
- $xv_i^y z$ dla każdego $z \in A \setminus \{x, y\}$.

Na mocy Lematu 3.15 z tego, że istnieje takie $z \in C(v')$, że $yv_i'z$, wynika, że $z \in C(v^y)$ lub istnieje takie $z' \in C(v^y)$, że $zv_i'z'$. Z drugiej strony $\{y\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v^y, więc na mocy Lematu 3.17 $C(v^y) = \{y\}$, a w profilu v^y mamy $yv_i^y zv_i^y z'$ - sprzeczność. Stąd żaden taki kandydat z, że $yv_i'z$, nie może należeć do $C(v')$. Stąd $C(v') \subset \{x, y\}$, czyli $C(v') = \{y\}$. Z własności (#) otrzymujemy więc, że $y\mathfrak{R}^{v'}x$ - sprzeczność z założeniem, że funkcja $\mathfrak{R}$ nie jest niewetowalna. Stąd $x \in C(v)$, czyli wyborca i jest słabym dyktatorem dla systemu C, co jest sprzecznie z założeniem $\neg$ **D**. Stąd dostajemy, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek $\neg$ **B**.

Pozostaje wykazać, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek **TRANS**. W tym celu wybierzmy dowolny taki profil $v \in V$ i dowolnych takich kandydatów $x, y, z \in A$, dla których $x\mathfrak{R}^v y\mathfrak{R}^v z$. Z warunku **SoPREF** oznacza to, że $x \neq y$, $y \neq z$ i $z \neq x$. Aby wykazać, że $x\mathfrak{R}^v z$, zbudujemy następujący profil $v' \in V$:

- profile v i v' są z_1z_2-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y, z\}$;
- strategie v_i' i v_i są xy-bliźniacze, yz-bliźniacze i xz-bliźniacze dla każdego $i = 1, ..., n$;
- dla każdego $i = 1, ..., n$ i dla wszystkich $a \in A \setminus \{x, y, z\}$ mamy $xv_i'a$, $yv_i'a$ i $zv_i'a$.

Zauważmy, że zbiorem faworytów dla profilu v' jest $\{x, y, z\}$, a ponadto profile v i v' są xy-bliźniacze, yz-bliźniacze i xz-bliźniacze. Na mocy warunku **IIA** oznacza to, że $x\mathfrak{R}^{v'}y\mathfrak{R}^{v'}z$, a także, że wystarczy wykazać, iż $x\mathfrak{R}^{v'}z$.

Z Lematu 3.17 otrzymujemy, że $C(v') \subset \{x, y, z\}$. Wykażemy teraz, że $y \notin C(v')$ i $z \notin C(v')$, co - z efektywności systemu wyborczego C - będzie oznaczać, że $C(v') = \{x\}$.

Najpierw załóżmy nie wprost, że $y \in C(v')$. Zbudujmy następujący profil $v'' \in V$:

- profile v'' i v' są z_1z_2-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y, z\}$;
- zbiór $\{x, y\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v'';
- $zv_i''a$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich $a \in A \setminus \{x, y, z\}$;
- profile v'' i v' są xy-bliźniacze.

Teraz zbudujmy ciąg profili $(v^i)_{i=0}^n$ o następujących własnościach:

- $v^0 = v'$;
- profile v^j i v^{j-1} są j-niezmiennicze, a $v_j^j = v_j''$ dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\}$.

Oczywiście $v^n = v''$. Wykażemy, że dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ z tego, że $y \in C(v^{i-1})$, wynika, że $y \in C(v^i)$. Gdy $v_i'' = v_i'$, to implikacja jest oczywista. Załóżmy więc, że $v_i'' \neq v_i'$. Oznacza to, że $zv_i'x$ lub $zv_i'y$. Stąd kandydat y jest albo na pierwszym miejscu listy wyborczej v_i'', albo na trzecim (po x i z) miejscu listy wyborczej v_i'. Jeżeli $y = \overline{y}^{v_i''}$, to implikacja wynika bezpośrednio z Lematu 3.15. Jeżeli natomiast kandydat y jest na trzecim miejscu listy wyborczej v'_i, to na mocy Lematu 3.15 z tego, że $y \in C(v^{i-1})$, wynika, że $y \in C(v^i)$ lub istnieje takie $a \in C(v^i)$, że $yv'_i a$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że dla każdego $i = 1, ..., n$ zbiór faworytów dla profilu v^i zawiera się w zbiorze $\{x, y, z\}$, a więc - na mocy Lematu 3.17 - $y \in C(v^i)$. Wykazaliśmy więc, że dla każdego $i = 1, ..., n$ z tego, że $y \in C(v^{i-1})$, wynika, że $y \in C(v^i)$. Ponieważ $y \in C(v')$, oznacza to, że $y \in C(v^i)$ dla każdego $i = 1, ..., n$, czyli w szczególności $y \in C(v'')$. Oznacza to, że $C(v'') \neq \{x\}$ - sprzeczność z definicją funkcji $\mathfrak{R}$, ponieważ $x\mathfrak{R}^{v'}y$, profile v' i v'' są xy-bliźniacze, a $\{x, y\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v''. Stąd otrzymujemy, że $y \notin C(v')$.

W ten sam sposób wykażemy, że $z \notin C(v')$. Załóżmy nie wprost, że $z \in C(v')$. Zbudujmy następujący profil $v''' \in V$:

- profile v''' i v' są $z_1 z_2$-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y, z\}$;
- zbiór $\{y, z\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v''';
- $xv'''_i a$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich $a \in A \setminus \{x, y, z\}$;
- profile v''' i v' są yz-bliźniacze.

Teraz zbudujmy ciąg profili $(v^i)_{i=0}^n$ o następujących własnościach:

- $v^0 = v'$;
- profile v^j i v^{j-1} są j-niezmiennicze, a $v^j_j = v'''_j$ dla wszystkich $j \in \{1, ..., n\}$.

Oczywiście $v^n = v'''$. Wykażemy, że dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ z tego, że $z \in C(v^{i-1})$, wynika, że $z \in C(v^i)$. Gdy $v'''_i = v'_i$, to implikacja jest oczywista. Załóżmy więc, że $v'''_i \neq v'_i$. Oznacza to, że $xv'_i y$ lub $xv'_i z$. Stąd kandydat z jest albo na pierwszym miejscu listy wyborczej v'''_i, albo na trzecim (po x i y) miejscu listy wyborczej v'_i. Jeżeli $z = \overline{z}^{v'''_i}$, to implikacja wynika bezpośrednio z Lematu 3.15. Jeżeli natomiast kandydat z jest na trzecim miejscu listy wyborczej v'_i, to na mocy Lematu 3.15 z tego, że $z \in C(v^{i-1})$, wynika, że $z \in C(v^i)$ lub istnieje takie $a \in C(v^i)$, że $zv'_i a$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że dla każdego $i = 1, ..., n$ zbiór faworytów dla profilu v^i zawiera się w zbiorze $\{x, y, z\}$, a więc - na mocy Lematu 3.17 - $z \in C(v^i)$. Wykazaliśmy więc, że dla każdego $i = 1, ..., n$ z tego, że $z \in C(v^{i-1})$, wynika, że $z \in C(v^i)$. Ponieważ $z \in C(v')$, oznacza to, że $z \in C(v^i)$ dla każdego $i = 1, ..., n$, czyli w szczególności $z \in C(v''')$. Oznacza to, że $C(v''') \neq \{y\}$ - sprzeczność z definicją funkcji $\mathfrak{R}$, ponieważ $y\mathfrak{R}^{v'}z$, profile v' i v''' są yz-bliźniacze, a $\{y, z\}$ jest zbiorem faworytów dla profilu v'''. Stąd otrzymujemy, że $y \notin C(v')$.

Wykazaliśmy, że $C(v') = \{x\}$. Z własności (#) otrzymujemy więc $x\mathfrak{R}^{v'}z$. Stąd dostajemy, że funkcja $\mathfrak{R}$ spełnia warunek **TRANS**. □

4. Drugie twierdzenie Duggana-Schwartza

Drugie twierdzenie Duggana-Schwartza zostało opublikowane przez Duggana i Schwartza w 2000 r. w pracy [**3**].

TWIERDZENIE 3.18 (DRUGIE TWIERDZENIE DUGGANA-SCHWARTZA). *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym, a $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0, 1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1, ..., n$. Następujące siedem warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
PROB: *Dla każdego $i = 1, ..., n$ oraz dla dowolnych $v \in V$, $X \subset A$ i $x \in A$ funkcja prawdopodobieństw i-tego wyborcy spełnia następujące warunki:*

- $\sum_{x \in A} p_i(v, X, x) = 1$,
- $p_i(v, X, \overline{y}^{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, \underline{y}_{v_i}|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, z) = 0$ *dla wszystkich* $z \notin X$.

WeCiSov: *System wyborczy C jest słabo niewykluczający.*
$\neg$ **SD:** *W C nie istnieje silny dyktator.*
RR: *System wyborczy C jest połowicznie rezolutny.*
$\neg$ **S:** *System C jest odporny na manipulacje.*[7]

Dla drugiego twierdzenia Duggana-Schwartza również możemy skorzystać z Lematu 3.11. Pozwala nam to na równoważne sformułowanie Twierdzenia 3.18 następująco:

TWIERDZENIE 3.19. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Następujące sześć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
WeCiSov: *System wyborczy C jest słabo niewykluczający.*
$\neg$ **SD:** *W C nie istnieje silny dyktator.*
RR: *System wyborczy C jest połowicznie rezolutny.*
MOP: *System C jest odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę.*[8]

Widzimy, że warunki **F3A, CH, PROB** i $\neg$ **S** są wspólne dla obu twierdzeń Duggana-Schwartza. Rozważmy, jakie są związki pomiędzy warunkami **CiSov, WeCiSov, RR,** $\neg$ **D** i $\neg$ **SD**.

Łatwo widać, że z $\neg$ **D** wynika $\neg$ **SD**, ponieważ jeżeli w pewnym systemie wyborczym nie ma nawet słabego dyktatora, to tym bardziej nie ma silnego. Natomiast związek między warunkami **RR, WeCiSov** i **CiSov** przedstawia następujący lemat:

LEMAT 3.20. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Załóżmy, że C jest odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę. Jeżeli system C jest połowicznie rezolutny i słabo niewykluczający, to dla każdego kandydata $x \in A$ istnieje taki profil $v \in V$, dla którego $C(v) = \{x\}$.*

---

[7] Pochodzenie skrótów:

- **WeCiSov**: We pochodzi od *weak* (ang. słaby), a CiSov od angielskiego pojęcia *citizens' sovereignty*, którym Duggan i Schwartz określają niewykluczalność;
- $\neg$ **SD**: S pochodzi od *strong* (ang. silny), a D od *dictator* (ang. dyktator);
- **RR**: od angielskiego pojęcia *residual resoluteness*, którym Duggan i Schwartz określają połowiczną rezolutność.

[8] Ta wersja pierwszego twierdzenia Duggana-Schwartza również została opublikowana przez Taylora w jego pracy [**11**] z 2002 roku.

Dowód. Wybierzmy dowolnego kandydata $x \in A$. Niech $v \in V$ będzie takim profilem, w którym dla pewnego drugiego kandydata $y \neq x$ zbiór $\{x, y\}$ jest zbiorem faworytów i każdy wyborca stawia x nad y w swojej strategii, tj. dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ mamy xv_iy. Pokażemy, że $C(v) = \{x\}$.

W tym celu załóżmy nie wprost, że $C(v) \neq \{x\}$, czyli $x \notin C(v)$ (bo C jest połowicznie rezolutny). Wybierzmy taki profil v', dla którego $x \in C(v')$ (jest to możliwe, bo x jest potencjalnym słabym zwycięzcą dla C). Możemy teraz zbudować ciąg profili $(v^i)_{i=0}^{i_0}$, gdzie $i_0 \leqslant n$, posiadający następujące własności:

- $v^0 = v$;
- dla każdego $i = 1, ..., i_0$ profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze, a $v^i_i = v'_i$;
- $x \notin C(v^i)$ dla każdego $i = 0, 1, ..., i_0 - 1$;
- $x \in C(v^{i_0})$.

Zauważmy, że kandydat x nie jest zwycięzcą dla profilu v^{i_0-1}, natomiast jest nim dla profilu v^{i_0}, oba profile różnią się od siebie wyłącznie strategią wyborcy i_0, a ponadto $v^{i_0-1}_{i_0} = v_{i_0}$ i $v^{i_0}_{i_0} = v'_{i_0}$. Zbiorem faworytów dla profilu v jest $\{x\}$, więc wyborca i_0 poprzez zmianę strategii z v_{i_0} na v'_{i_0} poprawił maksimum zbioru zwycięzców - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez optymistę. Stąd $x \in C(v)$, a ponieważ system C jest połowicznie rezolutny, to $C(v) = \{x\}$. □

W powyższym lemacie pokazaliśmy, że jeżeli system wyborczy jest odporny na manipulację, to z koniunkcji warunków **RR** i **WeCiSov** wynika **CiSov**. Wykorzystamy ten fakt w dowodzie drugiego twierdzenia Duggana-Schwartza. Dowód ten został opracowany na podstawie [**11**].

Dowód twierdzenia 3.19. Zakładamy, że zbiór kandydatów A jest skończony i co najmniej trzyelementowy, system wyborczy C jest efektywny, połowicznie rezolutny i odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę, a każdy kandydat $x \in A$ jest potencjalnym słabym zwycięzcą dla C. Wystarczy wykazać, że z tych warunków wynika, iż dla systemu C istnieje przynajmniej jeden silny dyktator.

Pokazaliśmy już, że każdy kandydat ze zbioru A jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu C, więc możemy skorzystać z Twierdzenia 3.10. Otrzymujemy, że istnieje wyborca - bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to wyborca i - będący słabym dyktatorem dla systemu C. Pokażemy, że i jest silnym dyktatorem.

Załóżmy nie wprost, że istnieje profil w', w którym pewien kandydat x jest na pierwszym miejscu listy wyborczej w'_i, ale $C(w') \neq \{x\}$. Oznacza to, że istnieje takie $z_0 \neq x$, że $z_0 \in C(w')$.

Definiujemy

$$\mathbb{W} := \{w'' \in V : w'' \text{ jest } i\text{-niezmiennikiem } w' \text{ i } x = \overline{x}^{w''_i}\}$$

$$\text{oraz } W := \{z \in A \setminus \{x\} : \text{istnieje takie } w'' \in \mathbb{W}, \text{ że } z \in C(w'')\}.$$

Dla każdego $z \in W$ definiujemy również

$$\lambda(z) := \max_{\{w'' \in \mathbb{W}:\ z \in C(w'')\}} \#\{a \in A : aw''_i z\}.$$

Wybieramy takiego kandydata $y \in W$, dla którego $\lambda(y) = \max_{z \in W} \lambda(z)$. Kandydat y jest poprawnie określony i $y \neq x$, ponieważ $z_0 \in W$. Niech $w \in \mathbb{W}$ będzie takim profilem, dla którego $y \in C(w)$ i który realizuje

$$\max_{\{w'' \in \mathbb{W}:\ y \in C(w'')\}} \#\{a \in A : aw''_i y\}.$$

Rozważmy taki profil $\tilde{w}$, dla którego zbiorem faworytów jest $\{x, y\}$, $y\tilde{w}_j x$ dla każdego $j \neq i$, $x\tilde{w}_i y$, a ponadto profile w i $\tilde{w}$ są $z_1 z_2$-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{x, y\}$. Oczywiście $x \in C(\tilde{w})$, ponieważ wyborca i jest słabym dyktatorem dla systemu C. Z połowicznej rezolutności C wynika, że $\#C(\tilde{w}) = 1$, a więc $C(\tilde{w}) = \{x\}$.

Zbudujmy ciąg profili $(w^j)_{j=0}^n$ o następujących własnościach:

- $w^0 = \tilde{w}$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ profile w^j i w^{j-1} są j-niezmiennicze, a $w^j_j = w_j$;
- $w^i = w^{i-1}$.

Pokażemy, że kandydat y nie jest zwycięzcą dla żadnego profilu z powyższego ciągu. W tym celu załóżmy nie wprost, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $y \in C(w^{j_0})$. Istnieje więc również takie $j_1 \leqslant j_0$ ($j_1 \neq i$), że $y \notin C(w^{j_1 - 1})$ i $y \in C(w^{j_1})$ (bo $y \notin C(w^0)$). Profile w^{j_1-1} i w^{j_1} różnią się od siebie wyłącznie strategią wyborcy j_1, a ponadto $w^{j_1-1}_{j_1} = \tilde{w}_{j_1}$ i $w^{j_1}_{j_1} = w_{j_1}$. Mamy $y = \overline{y}^{\tilde{w}_{j_1}}$, więc wyborca j_1 poprzez zmianę strategii z $\tilde{w}_{j_1}$ na w_{j_1} poprawił maksimum zbioru zwycięzców - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez optymistę. Stąd $y \notin C(w^j)$ dla żadnego $j = 0, 1, ..., n$. W szczególności $y \notin C(w^n)$.

Zauważmy, że $w^n \in \mathbb{W}$. Oznacza to, że profile w i w^n są i-niezmiennicze. Jeżeli $C(w^n) = \{x\}$, to wyborca i poprzez zmianę strategii z w_i na w^n_i poprawił minimum zbioru zwycięzców z y na x, gdzie $x = \overline{x}^{w_i}$ - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez pesymistę. Stąd $C(w^n) \neq \{x\}$ i w szczególności istnieje takie $y' \in C(w^n)$, że $y' \neq y$ i $y' \neq x$. Niech $y_0 = \underline{y}_{w^n_i}\big|_{C(w^n)}$. Z definicji $w^n_i = \tilde{w}_i$ wynika, że $y_0 \neq x$ i $y_0 \neq y$.

Załóżmy, że $yw_i y_0$. Z definicji y oznacza to, że $y_0 \notin C(w)$. Stąd, że $w^n_i = \tilde{w}_i$, wynika, iż $yw^n_i y_0$. Zauważmy, że dla każdego $a \in C(w) \setminus \{x, y\}$ mamy $aw^n_i y_0$ (ponieważ $aw_i yw_i y_0$). W takim razie wyborca i poprzez zmianę strategii z $w^n_i = \tilde{w}_i$ na w_i poprawił minimum zbioru zwycięzców z y_0 na pewnego kandydata $y_1 \in C(w)$, gdyż dla każdego $y_1 \in C(w)$ mamy $y_1 w^n_i y_0$ - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez pesymistę.

Stąd musi zachodzić $y_0 w_i y$. To z kolei oznacza, że wyborca i poprzez zmianę strategii z w_i na $w^n_i = \tilde{w}_i$ poprawił minimum zbioru zwycięzców z y na y_0 (bo $\underline{y}_{w^n_i}\big|_{C(w^n)} = \underline{y}_{w_i}\big|_{C(w^n)}$) - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez pesymistę. $\square$

ROZDZIAŁ 4

Remisy w strategiach

W rozdziałach drugim i trzecim rozpatrywaliśmy sytuacje, w których wszystkie strategie wyborców były silnymi porządkami wyborczymi. W tym rozdziale zajmiemy się uogólnieniem przedstawionych tam twierdzeń o manipulacji na przypadek, w którym listy wyborcze są słabymi porządkami wyborczymi. Pokażemy, że zarówno twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a jak i twierdzenie Duggana-Schwartza można rozszerzyć na przypadek, gdy dopuszczamy remisy w strategiach wyborców.

W pierwszym podrozdziale rozdziału trzeciego stwierdziliśmy, że większość używanych na świecie systemów wyborczych nie pozwala wyborcom na umiejscowienie więcej niż jednego kandydata na tym samym miejscu listy wyborczej. Nie są to jednak wszystkie systemy. Pokażemy kilka przykładów systemów dopuszczających remisy w strategiach wyborców.

Takim systemem jest na przykład **głosowanie aprobujące** - obecnie bardzo rzadko używane - polegające na tym, że każdy wyborca głosuje jednocześnie na dowolną liczbę kandydatów, a zwycięzcą zostaje ten z nich, na którego oddała głos największa liczba wyborców, tj. ten, który został zaaprobowany przez największą liczbę wyborców. Ten system wyborczy był między innymi stosowany do wyboru papieża przez konklawe kardynałów w latach 1294 - 1621.[1]

Istnieją również systemy, które nazywa się czasem **opcjonalnymi systemami preferencyjnymi**. Wyborca głosujący w takim systemie musi wskazać swojego faworyta, a dodatkowo może, ale nie musi, uporządkować na liście - zazwyczaj bez możliwości remisów - część pozostałych kandydatów. Takie systemy różnią się od preferencyjnych tym, że pozwalają wyborcom na pominięcie w swoich głosach części kandydatów. Nie różni się to jednak niczym od sytuacji, w której ci kandydaci, na temat których pewien wyborca nie chce wyrażać swojej opinii w wyborach, są umieszczani razem na ostatnim miejscu jego listy. Z tego powodu możemy stwierdzić, że opcjonalne systemy preferencyjne w pewnym sensie dopuszczają remisy.

Jednym z bardziej popularnych na świecie opcjonalnych systemów wyborczych jest **system głosu alternatywnego** zwany też **systemem większościowym z natychmiastową dogrywką**.[2] Polega on na tym, że wyborcy wskazują swoich faworytów i dodatkowo porządkują na listach - jeśli chcą - pewną wybraną przez siebie liczbę pozostałych kandydatów. Jeżeli istnieje kandydat, który zdobył ponad 50% pierwszych miejsc, to zostaje on wybrany zwycięzcą. Jeżeli taki kandydat nie istnieje, to ze wszystkich list

[1] Te informacje zostały zaczerpnięte z rozdziału trzeciego książki [**8**].

[2] System głosu alternatywnego został wymyślony przez Williama Ware'a (ur. 27 maja 1832 r. w Cambridge, Massachusetts, zm. 9 czerwca 1915 r.) - amerykańskiego architekta. Po raz pierwszy został użyty w 1908 roku w wyborach stanowych w Australii Zachodniej.

wyborczych wykreśla się kandydata (kandydatów przy równej liczbie głosów) z najmniejszą ilością pierwszych miejsc i ponownie sprawdza, czy nikt nie zdobył większości. Procedurę kontynuuje się do momentu otrzymania zwycięzcy. Zauważmy, że system głosu alternatywnego pokrywa się z opisaną w pierwszym rozdziale metodą Hare'a z tą różnicą, że metoda Hare'a zakłada uporządkowanie przez wyborców wszystkich kandydatów. System głosu alternatywnego jest stosowany między innymi w Indiach i Irlandii w wyborach prezydenckich oraz w wyborach deputowanych Zgromadzenia Ustawodawczego Nowej Południowej Walii.

Przykład 4.1 (Przykład manipulacji w systemie głosu alternatywnego).
Rozpatrujemy przypadek, w którym mamy czterech kandydatów (A, B, C i D) i 11 wyborców, których strategie przedstawia tabela poniżej.

4	4	3
A	C	D
B	D	B
C	B	A
D	A	C

Zakładamy, że zwycięzca wybierany jest systemem głosu alternatywnego. W powyższym przypadku zbiorem zwycięzców jest $\{A\}$. Jeżeli jeden z wyborców - dla ustalenia uwagi nazwijmy go i - zmieni swoją strategię z drugiej na trzecią, to nowy profil będzie wyglądał następująco:

4	3	4
A	C	D
B	D	B
C	B	A
D	A	C

.

Zwycięzcą dla tego profilu jest kandydat D, który znajduje się na pierwszej liście wyborczej wyborcy i wyżej od kandydata A. Taka zmiana głosu jest więc przykładem manipulacji.

Przykład 4.2 (Przykład manipulacji pesymistycznej w opcjonalnym systemie preferencyjnym).
Rozpatrujemy sytuację, w której w wyborach startuje czterech kandydatów (A, B, C i D), a zwycięzca wybierany jest opcjonalnym systemem preferencyjnym analogicznym do punktów Bordy. Zakładamy, że wyborców jest 11, a ich strategie przedstawia tabela poniżej.

1	2	2	2
A	B	D	C
B, C, D	D	C	A
-	A	A, B	B
-	C	-	D

Zbiorem zwycięzców dla tego profilu jest $\{C, D\}$. Jeżeli jeden z wyborców - dla ustalenia uwagi nazwijmy go i - zmieni swoją strategię

$$\text{z} \begin{array}{|c|} B \\ D \\ A \\ C \end{array} \text{ na } \begin{array}{|c|} A \\ D \\ B \\ C \end{array},$$

to powstały w wyniku tej zmiany profil będzie następujący:

1	1	2	2	1
A	B	D	C	A
B, C, D	D	C	A	D
-	A	A, B	B	B
-	C	-	D	C

.

Zwycięzcą dla tego profilu jest kandydat A. Jeżeli więc uznamy pierwszą strategię wyborcy i za szczerą, a drugą za nieszczerą, to powyższa zmiana jest przykładem manipulacji przez pesymistycznego wyborcę.[3]

W celu uogólnienia twierdzeń, które przedstawiliśmy w rozdziałach drugim i trzecim, potrzebujemy wprowadzić dodatkowe symbole na oznaczenie różnych relacji między kandydatami w strategiach.

Niech v_i będzie słabym porządkiem wyborczym ($i = 1, ..., n$) i niech dane będą $x, y \in A$. Symbolem $xv_i^{>}y$ będziemy określać sytuację, w której x jest silnie większe od y w porządku v_i. Symbolem $xv_i^{\geqslant}y$ będziemy wyrażać, że x jest większe lub równe od y w porządku v_i. Symbol $xv_i^{\equiv}y$ będzie natomiast oznaczał, że x jest równoważne y w porządku v_i.

1. Przypadek systemów decyzyjnych

Ponownie rozważamy sytuację, w której mamy do czynienia z systemami wyborczymi zawsze wyłaniającymi jedynego zwycięzcę. Większość potrzebnych nam pojęć - w szczególności podana w pierwszym rozdziale definicja podatności na manipulacje decyzyjnych systemów wyborczych - nie wykluczała remisów w strategiach, więc wciąż możemy z nich korzystać. Potrzebujemy jednak rozszerzyć na słabe porządki pojęcia związane z dyktaturą.

Definicja 4.3. Dla każdego wyborcy $i \in \{1, ..., n\}$ i dla dowolnego profilu $v \in V$ **zbiorem liderów listy** v_i nazywamy największy w sensie inkluzji niepusty podzbiór X zbioru A o tej własności, że dla wszystkich $x, y \in X$ i dla każdego $z \notin X$ zachodzi $xv_i^{\equiv}y$ oraz $xv_i^{>}z$.

Każdego kandydata należącego do zbioru liderów listy v_i będziemy nazywać **liderem listy** v_i.

Zbiór liderów listy v_i będziemy oznaczać przez $L(v_i)$.

Definicja 4.4. W sytuacji, gdy dopuszczamy remisy w strategiach, wyborcę i nazywamy **dyktatorem** decyzyjnego systemu wyborczego C, jeżeli dla każdego profilu $v \in V$ zachodzi $C(v) \in L(v_i)$.

Innymi słowy, wyborca i jest dyktatorem systemu wyborczego C, jeżeli jedynym zwycięzcą zawsze jest jeden z kandydatów będących ex aequo na pierwszym miejscu jego listy wyborczej.

[3] Zamieszczone przykłady pokazują, że opcjonalne systemy preferencyjne, a w szczególności system głosu alternatywnego, są podatne na manipulacje. Nie możemy tego jednak wywnioskować bezpośrednio z żadnego z twierdzeń o manipulacji, ponieważ są to systemy, dla których dziedziną funkcji C nie jest cały zbiór V, a jedynie pewne jego podzbiory.

Decyzyjny system wyborczy C jest **dyktaturą**, jeżeli istnieje wyborca będący dyktatorem dla C.

Zauważmy, że jeżeli na pierwszym miejscu strategii dyktatora znajduje się dokładnie jeden kandydat, to jest on silnym dyktatorem. W szczególności, jeżeli założymy, że remisy nie mogą występować na pierwszych miejscach list wyborczych, to powyższa definicja pokrywa się z definicją silnej dyktatury.

Przedstawimy teraz uogólnienie twierdzenia Gibbarda-Satterthwaite'a na przypadek, w którym dopuszczamy remisy w strategiach wyborców.

Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a dla słabych porządków).
Niech A będzie skończonym i co najmniej trzyelementowym zbiorem kandydatów, $\{1, ..., n\}$ będzie zbiorem wyborców i niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Jeżeli system C jest decyzyjny, niewykluczający i odporny na manipulacje, to C jest dyktaturą.

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższe twierdzenie - jeżeli ograniczmy się z powrotem do silnych porządków na listach wyborczych - pokrywa się całkowicie z Twierdzeniem 2.1. Oryginalne wersje Twierdzenia 2.1 podane przez Gibbarda w [**5**] i Satterthwaite'a w [**9**] obie zajmowały się przypadkiem, gdy dopuszczamy remisy w strategiach wyborców. Jest jednakże wygodniej - jak zauważa Taylor w [**10**] - rozważać twierdzenie Gibbarda-Satterthwaite'a oddzielnie w przypadkach silnych i słabych porządków w strategiach wyborców, ponieważ twierdzenie w pierwszym z nich można wykorzystać do dowodu w drugim, co właśnie teraz zrobimy.

Dowód twierdzenia 4.5. Niech $V' \subset V$ będzie podzbiorem złożonym z tych profili, w których nie występują remisy w strategiach wyborców. Zdefiniujmy system wyborczy $C' : V' \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ jako restrykcję systemu C do V', tj. $C' := C\big|_{V'}$. Założyliśmy, że C jest odporny na manipulacje, więc oczywiście C' również. Z tego samego powodu C' jest decyzyjny. Pokażemy, że system wyborczy C' jest niewykluczający. W tym celu wykażemy, że C' spełnia **zasadę jednomyślności**, która mówi, że jeżeli pewien kandydat $x \in A$ jest sam na pierwszym miejscu strategii wszystkich wyborców, to jest on jedynym zwycięzcą.

Załóżmy nie wprost, że istnieje taki profil $v \in V'$ i pewien taki kandydat $x \in A$, dla którego mamy $x v_i^{>} y$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich $y \in A \setminus \{x\}$, ale $C'(v) \neq \{x\}$. Oznacza to w szczególności, że $C(v) \neq \{x\}$. Każdy kandydat jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu C, więc możemy wybrać taki profil $v' \in V$, dla którego $C(v') = \{x\}$. Teraz możemy zbudować ciąg profili $(v^i)_{i=0}^{i_0}$ z V, gdzie $i_0 \leqslant n$, posiadający następujące własności:

- $v^0 = v$;
- dla każdego $i = 1, ..., i_0$ profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze, a $v_i^i = v_i'$;
- $C(v^i) \neq \{x\}$ dla każdego $i = 0, 1, ..., i_0 - 1$;
- $C(v^{i_0}) = \{x\}$.

Podkreślmy, że profile v^{i_0-1} i v^{i_0} różnią się między sobą wyłącznie strategią wyborcy i_0. Wyborca i_0 przez zmianę strategii z $v_{i_0}^{i_0-1} = v_{i_0}$ na $v_{i_0}^{i_0} = v_{i_0}'$ doprowadził więc do zmiany zbioru zwycięzców z pewnego $\{y\}$, gdzie $y \neq x$, na $\{x\}$, co jest manipulacją, ponieważ $x = \overline{x}^{v_{i_0}}$ - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulacje. Stąd $C'(v) = \{x\}$, czyli system C' spełnia zasadę jednomyślności. W szczególności więc każdy kandydat $x \in A$ jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu wyborczego C'.

Pokazaliśmy, że system wyborczy C' spełnia założenia Twierdzenia 2.1. Stąd C' jest silną dyktaturą. Bez straty ogólności możemy założyć, że silnym dyktatorem dla C' jest wyborca i. Z definicji C' oznacza to, że jeżeli strategie wyborców są silnymi porządkami, to z tego, że pewien kandydat $x \in A$ jest na pierwszym miejscu listy wyborczej i-tego wyborcy w pewnym profilu v_x, wynika, że $C(v_x) = \{x\}$. Wykażemy, że wyborca i jest dyktatorem dla C.

Załóżmy nie wprost, że wyborca i nie jest dyktatorem dla systemu wyborczego C. Oznacza to, że istnieje taki profil $w \in V$, w którym $C(w) = \{y\}$ dla pewnego $y \in A$, ale istnieje taki kandydat $x \neq y$, że $xw_i^{>}y$.

Zbudujemy teraz nowy ciąg profili $(w^j)_{j=0}^n$:

- $w^0 = w$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ profile w^j i w^{j-1} są j-niezmiennicze, a w_j^j posiada następujące własności:
  - dla każdego $z \in A \setminus \{y\}$ mamy $y(w_j^{>})^j z$;
  - profile w_j^j i w_j są $z_1 z_2$-bliźniacze dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus \{y\}$;
- $w^i = w^{i-1}$.

Zauważmy, że dla każdego $j = 0, 1, ..., n$ mamy $C(w^j) = \{y\}$. Oczywiście $C(w^0) = \{y\}$. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $C(w^{j_0}) \neq \{y\}$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, $j_1 \neq i$, że $C(w^{j_1}) \neq \{y\}$ i $C(w^{j_1 - 1}) = \{y\}$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że profile w^{j_1} i w^{j_1-1} różnią się jedynie strategią wyborcy j_1 i $y = \overline{y}^{w_{j_1}^{j_1}}$. Stąd wyborca j_1 zmieniając strategię z $w_{j_1}^{j_1}$ na $w_{j_1}^{j_1-1}$ zmieniałby zwycięzcę na swojego jedynego faworyta - sprzeczność z tym, że system C jest odporny na manipulacje.

Teraz zbudujmy profil $\tilde{w}$ związany z profilem w^n następująco:

- $\tilde{w}_i = w_i^n$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ mamy:
  - dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1(w_j^{>})^n z_2$, wynika, że $z_1 \tilde{w}_j^{>} z_2$;
  - dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1(w_j^{\equiv})^n z_2$, wynika, że $z_1 \tilde{w}_j^{>} z_2$ albo $z_2 \tilde{w}_j^{>} z_1$.

Analogicznie jak w poprzednim akapicie, możemy teraz zbudować następujący ciąg profili $(\tilde{w}^j)_{j=0}^n$:

- $\tilde{w}^0 = w^n$;
- profile $\tilde{w}^j$ i $\tilde{w}^{j-1}$ są j-niezmiennicze dla każdego $j \in \{1, ..., n\}$, a $\tilde{w}_j^j = \tilde{w}_j$.

Oczywiście $\tilde{w}^n = \tilde{w}$. Powtarzając argument z poprzedniego akapitu, zauważmy, że dla każdego $j = 1, ..., n$ mamy $C(\tilde{w}^j) = \{y\}$. Załóżmy bowiem nie wprost, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $C(\tilde{w}^{j_0}) \neq \{y\}$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, $j_1 \neq i$, że $C(\tilde{w}^{j_1}) \neq \{y\}$ i $C(\tilde{w}^{j_1-1}) = \{y\}$ (bo $C(\tilde{w}^{j_0}) = \{y\}$). Profile $\tilde{w}^{j_1}$ i $\tilde{w}^{j_1-1}$ różnią się jedynie strategią wyborcy j_1 i $y = \overline{y}^{\tilde{w}_{j_1}^{j_1}}$. Z tego powodu wyborca j_1 przez zmianę strategii z $\tilde{w}_{j_1}^{j_1}$ na $\tilde{w}_{j_1}^{j_1-1}$

zmienia zwycięzcę na swojego jedynego faworyta - sprzeczność z odpornością systemu C na manipulacje.

W poprzednim akapicie pokazaliśmy w szczególności, że $C(\tilde{w}) = \{y\}$. Zbudujmy taki profil $\bar{w}$, że:

- $\bar{w}_j = \tilde{w}_j$ dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$;
- dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 \tilde{w}_i^{>} z_2$, wynika, że $z_1 \bar{w}_i^{>} z_2$;
- dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 \tilde{w}_i^{=} z_2$, wynika, że $z_1 \bar{w}_i^{>} z_2$ albo $z_2 \bar{w}_i^{>} z_1$.

Zauważmy, że $\bar{w} \in V'$, a wyborca i jest silnym dyktatorem w C'. Stąd $C'(\bar{w}) = \{z_0\}$, gdzie $z_0 \in A$ jest jedynym liderem listy $\bar{w}_i$, czyli z określenia $\bar{w}$ jednym z liderów listy w_i. Oznacza to, że $C(\bar{w}) = C'(\bar{w}) \neq \{y\}$.

Z drugiej strony zauważmy jednak, że profile $\bar{w}$ i $\tilde{w}$ różnią się jedynie strategią wyborcy i. Z tego powodu wyborca i przez zmianę strategii z $\tilde{w}_i$ na $\bar{w}_i$ zmienia zwycięzcę z y na z_0 - kandydata, który jest na liście $\tilde{w}_i = w_i$ wyżej od y - sprzeczność z tym, że C jest odporny na manipulacje. W takim razie wykazaliśmy, że wyborca i jest dyktatorem dla systemu C. $\square$

2. Przypadek systemów efektywnych

W przypadku systemów efektywnych również potrzebujemy rozszerzyć na słabe porządki pojęcia związane z dyktaturą.

Definicja 4.6. W sytuacji, gdy dopuszczamy remisy w strategiach, wyborcę i nazywamy **słabym dyktatorem** systemu wyborczego C, jeżeli dla każdego profilu $v \in V$ istnieje taki kandydat $x \in L(v_i)$, że $x \in C(v)$.

Inaczej mówiąc, wyborca jest słabym dyktatorem, jeżeli ktoś spośród liderów jego listy wyborczej zawsze należy do zbioru zwycięzców.

System wyborczy, w którym występuje słaby dyktator, nazywamy **słabą dyktaturą**.

Podobnie jak w przypadku systemów decyzyjnych możemy zauważyć, że jeżeli założymy, iż remisy nie mogą występować na pierwszych miejscach list wyborczych, to powyższa definicja pokrywa się z wcześniej postawioną definicją słabej dyktatury.

Przedstawimy teraz uogólnienie twierdzenia Duggana-Schwartza na przypadek, w którym dopuszczamy remisy w strategiach wyborców.

Twierdzenie 4.7 (Twierdzenie Duggana-Schwartza dla słabych porządków).
Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym, a $p_i : (V, \mathcal{P}(A), A) \longrightarrow [0, 1]$ będą funkcjami prawdopodobieństw i-tego wyborcy dla $i = 1, ..., n$. Następujące sześć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
PROB: *Dla każdego $i = 1, ..., n$ i dla dowolnych $v \in V$, $X \subset A$ i $x \in A$ funkcja prawdopodobieństw i-tego wyborcy spełnia następujące warunki:*

- $\sum_{x \in A} p_i(v, X, x) = 1$,
- $p_i(v, X, \overline{y}^{v_i}|_X) > 0$,

- $p_i(v, X, \underline{y}_{v_i}\big|_X) > 0$,
- $p_i(v, X, z) = 0$ *dla wszystkich* $z \notin X$.

CiSov: *System C jest niewykluczający.*
$\neg$ D: *W C nie istnieje słaby dyktator.*
$\neg$ S: *System C jest odporny na manipulacje.*

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższe twierdzenie - jeżeli ograniczmy się z powrotem do silnych porządków na listach wyborczych - pokrywa się zupełnie z Twierdzeniem 3.10. Tak samo jak w rozdziale trzecim, tutaj również korzystamy z Lematu 3.11, aby równoważnie sformułować powyższe twierdzenie w następujący sposób:

TWIERDZENIE 4.8. *Niech A będzie zbiorem kandydatów, a $\{1, ..., n\}$ zbiorem wyborców. Niech $C : V \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie systemem wyborczym. Następujące pięć warunków nie może być jednocześnie spełnionych:*

F3A: *Zbiór A jest skończony i co najmniej trzyelementowy.*
CH: *System wyborczy C jest efektywny.*
CiSov: *System wyborczy C jest niewykluczający.*
$\neg$ D: *W C nie istnieje słaby dyktator.*
MOP: *System C jest odporny na manipulacje zarówno przez optymistę jak i pesymistę.*[4]

Powyższe twierdzenie jest oczywiście dokładnym odpowiednikiem Twierdzenia 3.12 dla silnych porządków wyborczych, co - analogicznie jak w poprzednim podrozdziale - wykorzystamy w dowodzie. Dowód, który przedstawimy, został opracowany na podstawie [**11**].

DOWÓD TWIERDZENIA 4.8. Na początek zauważmy, że aby udowodnić to twierdzenie wystarczy wykazać, iż z koniunkcji warunków **F3A, CH, CiSov** i **MOP** wynika, że w systemie C istnieje przynajmniej jeden słaby dyktator. Zakładamy więc, że system wyborczy C spełnia warunki **F3A, CH, CiSov** i **MOP**.

Niech $V' \subset V$ będzie podzbiorem złożonym z tych profili, w których nie występują remisy w strategiach wyborców i niech system wyborczy $C' : V' \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ będzie restrykcją systemu C do V', tj. $C' := C\big|_{V'}$. Oczywiście C' również jest efektywny i odporny na manipulacje przez optymistę i pesymistę. Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.5 udowodnimy, że C' jest niewykluczający, poprzez wykazanie, że każdy kandydat $x \in A$ jest jedynym zwycięzcą dla C' w profilu, w którym zbiorem faworytów jest $\{x\}$. Ten dowód podzielimy na dwa etapy: najpierw pokażemy, że dla każdego takiego profilu v zachodzi $x \in C'(v)$, a następnie, że w rzeczonym profilu v nie ma żadnych innych zwycięzców dla C'.

Załóżmy nie wprost, że istnieje taki profil $v \in V'$ i pewien taki kandydat $x \in A$, dla którego mamy $x v_i^{>} y$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ i dla wszystkich $y \in A \setminus \{x\}$, ale $x \notin C'(v)$. Oznacza to w szczególności, że $x \notin C(v)$. Każdy kandydat jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu C, więc możemy wybrać taki profil $v' \in V$, dla którego $C(v') = \{x\}$. Teraz możemy zbudować ciąg profili $(v^i)_{i=0}^{i_0}$ z V, gdzie $i_0 \leqslant n$, posiadający następujące własności:

[4] To twierdzenie zostało opublikowane przez Taylora w pracy [**11**].

- $v^0 = v$;
- dla każdego $i = 1, ..., i_0$ profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze, a $v^i_i = v'_i$;
- $x \notin C(v^i)$ dla każdego $i = 0, 1, ..., i_0 - 1$;
- $x \in C(v^{i_0})$.

Podkreślmy, że profile v^{i_0-1} i v^{i_0} różnią się między sobą wyłącznie strategią wyborcy i_0, a $x = \overline{x}^{v_{i_0}}$. W takim razie wyborca i_0 przez zmianę strategii z $v^{i_0-1}_{i_0} = v_{i_0}$ na $v^{i_0}_{i_0} = v'_{i_0}$ poprawił maksimum zbioru zwycięzców na swojego faworyta - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez optymistę. Stąd $x \in C'(v)$.

Teraz pokażemy, że nie istnieje taki $y \in A \setminus \{x\}$, że $y \in C'(v)$. W tym celu załóżmy nie wprost, że taki kandydat y istnieje. Analogicznie jak w poprzednim akapicie oznacza to, że $y \in C(v)$. Ponownie rozważmy nasz profil v'. Możemy zbudować następujący ciąg profili:

- $v^0 = v$;
- dla każdego $i = 1, ..., i_0$ profile v^i i v^{i-1} są i-niezmiennicze, a $v^i_i = v'_i$;
- $C(v^i) \neq \{x\}$ dla każdego $i = 0, 1, ..., i_0 - 1$;
- $C(v^{i_0}) = \{x\}$.

Ponownie zauważmy, że profile v^{i_0-1} i v^{i_0} różnią się między sobą wyłącznie strategią wyborcy i_0, a $x = \overline{x}^{v_{i_0}}$. W takim razie wyborca i_0 przez zmianę strategii z $v^{i_0-1}_{i_0} = v_{i_0}$ na $v^{i_0}_{i_0} = v'_{i_0}$ poprawił minimum zbioru zwycięzców na swojego faworyta - sprzeczność z tym, że system wyborczy C jest odporny na manipulację przez pesymistę. Stąd $C'(v) = \{x\}$.

Pokazaliśmy, że każdy kandydat $x \in A$ jest potencjalnym zwycięzcą dla systemu wyborczego C'. Oznacza to, że możemy skorzystać z Twierdzenia 3.12, z którego otrzymujemy, że C' jest słabą dyktaturą. Bez straty ogólności możemy założyć, że słabym dyktatorem dla C' jest wyborca i. Z definicji C' oznacza to, że jeżeli strategie wyborców są silnymi porządkami, to z tego, że pewien kandydat $x \in A$ jest na pierwszym miejscu strategii i-tego wyborcy w pewnym profilu v_x, wynika, że $x \in C(v_x)$. Wykażemy, że wyborca i jest słabym dyktatorem dla C.

Załóżmy nie wprost, że wyborca i nie jest słabym dyktatorem dla systemu wyborczego C. Oznacza to, że istnieje taki profil $w \in V$, dla którego $C(w) \cap L(w_i) = \varnothing$. Zdefiniujmy

$$\mathbb{W} := \{u \in V : C(u) \cap L(u_i) = \varnothing\}.$$

Dla każdego profilu $u \in \mathbb{W}$ zdefiniujmy również wartość $\lambda_u := \#C(u)$. Niech

$$\lambda := \min_{u \in \mathbb{W}} \lambda_u.$$

Wybieramy taki profil $w' \in \mathbb{W}$, dla którego $\lambda_{w'} = \lambda$.

Zbudujemy teraz nowy ciąg profili $(w^j)^n_{j=0}$:

- $w^0 = w'$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ profile w^j i w^{j-1} są j-niezmiennicze, a w^j_j posiada następujące własności:
  - dla każdego $x \in C(w')$ i dla wszystkich $z \in A \setminus C(w')$ mamy $x(w^>_j)^j z$;
  - dla wszystkich $z_1, z_2 \in A \setminus C(w')$ profile w^j_j i w'_j są $z_1 z_2$-bliźniacze;

- $w^i = w^{i-1}$.

Zauważmy, że dla każdego $j = 0, 1, ..., n$ mamy $C(w^j) \subset C(w')$. Oczywiście $C(w^0) \subset C(w')$. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $C(w^{j_0}) \not\subset C(w')$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, $j_1 \neq i$, że $C(w^{j_1-1}) \subset C(w')$ i $C(w^{j_1}) \not\subset C(w')$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że profile w^{j_1} i w^{j_1-1} różnią się jedynie strategią wyborcy j_1. Stąd wyborca j_1 zmieniając strategię z $w^{j_1}_{j_1}$ na $w^{j_1-1}_{j_1} = w'_{j_1}$ poprawiałby minimum zbioru zwycięzców z pewnego kandydata, który nie jest jego faworytem, na jednego ze swoich faworytów - sprzeczność z tym, że system C jest odporny na manipulację przez pesymistę. Dlatego $C(w^j) \subset C(w')$ dla każdego $j = 0, 1, ..., n$. W takim razie dla każdego $j = 0, 1, ..., n$ mamy $C(w^j) = C(w')$, ponieważ nie istnieje profil o mniejszej liczbie zwycięzców dla systemu C niż profil w'. W szczególności więc mamy $C(w^n) = C(w')$.

Teraz zbudujmy profil $\tilde{w}$ związany z profilem w^n następująco:

- $\tilde{w}_i = w^n_i$;
- dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ mamy:
  - dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 (w^{>}_j)^n z_2$, wynika, że $z_1 \tilde{w}^{>}_j z_2$;
  - dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 (w^{\equiv}_j)^n z_2$, wynika, że $z_1 \tilde{w}^{>}_j z_2$ albo $z_2 \tilde{w}^{>}_j z_1$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.5, możemy teraz zbudować następujący ciąg profili $(\tilde{w}^j)^n_{j=0}$:

- $\tilde{w}^0 = w^n$;
- profile $\tilde{w}^j$ i $\tilde{w}^{j-1}$ są j-niezmiennicze dla każdego $j \in \{1, ..., n\}$, a $\tilde{w}^j_j = \tilde{w}_j$.

Oczywiście $\tilde{w}^n = \tilde{w}$. Ponownie zauważmy, że dla każdego $j = 0, 1, ..., n$ mamy $C(\tilde{w}^j) \subset C(w')$. Uzasadnienie tego faktu jest analogicznie do wyżej przedstawionego. Oczywiście $C(\tilde{w}^0) = C(w')$. Załóżmy nie wprost, że istnieje takie $j_0 \in \{1, ..., n\}$, że $C(\tilde{w}^{j_0}) \not\subset C(w')$. Oznacza to, że istnieje takie $j_1 \leqslant j_0$, $j_1 \neq i$, że $C(\tilde{w}^{j_1-1}) \subset C(w')$ i $C(\tilde{w}^{j_1}) \not\subset C(w')$. Zwróćmy jednak uwagę na to, że profile $\tilde{w}^{j_1}$ i $\tilde{w}^{j_1-1}$ różnią się jedynie strategią wyborcy j_1. Stąd wyborca j_1 zmieniając strategię z $\tilde{w}^{j_1}_{j_1}$ na $\tilde{w}^{j_1-1}_{j_1}$ poprawiałby minimum zbioru zwycięzców z pewnego kandydata, który nie jest jego faworytem, na jednego ze swoich faworytów - sprzeczność z tym, że system C jest odporny na manipulację przez pesymistę. W takim razie $C(\tilde{w}^j) \subset C(w')$ dla każdego $j = 0, 1, ..., n$, a więc - ponownie korzystając z faktu, że nie istnieje profil o mniejszej liczbie zwycięzców dla systemu C niż profil w' - otrzymujemy, że dla każdego $j = 0, 1, ..., n$ mamy $C(\tilde{w}^j) = C(w')$. W szczególności więc mamy $C(\tilde{w}^n) = C(w')$, czyli $C(\tilde{w}) = C(w')$.

Zbudujmy teraz taki profil $\bar{w}$, że:

- $\bar{w}_j = \tilde{w}_j$ dla każdego $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$;
- dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 \tilde{w}^{>}_i z_2$, wynika, że $z_1 \bar{w}^{>}_i z_2$;
- dla dowolnych $z_1, z_2 \in A$ z tego, że $z_1 \tilde{w}^{\equiv}_i z_2$, wynika, że $z_1 \bar{w}^{>}_i z_2$ albo $z_2 \bar{w}^{>}_i z_1$.

Zauważmy, że $\bar{w} \in V'$, a wyborca i jest słabym dyktatorem w C'. Stąd $x_0 \in C'(\bar{w})$, czyli $x_0 \in C(\bar{w})$, gdzie $x_0 \in A$ jest jedynym liderem listy $\bar{w}_i$, czyli z określenia $\bar{w}$ jednym z liderów listy w'_i. Zauważmy również, że profile $\bar{w}$ i $\tilde{w}$ różnią się jedynie strategią wyborcy i. Z tego powodu wyborca i przez zmianę strategii z $\tilde{w}_i$ na $\bar{w}_i$ poprawia maksimum zbioru zwycięzców z pewnego kandydata należącego do $C(w')$, które jest rozłączne z $L(w'_i)$, na x_0, gdzie $x_0 \in L(w'_i)$ - sprzeczność z tym, że C jest odporny na manipulację przez optymistę. W takim razie wykazaliśmy, że wyborca i jest słabym dyktatorem dla systemu C. $\square$

Indeks rzeczowy

Spis własności

Bibliografia

[1] Krzysztof Ciesielski, Matematyczne Aspekty Wyborów, wykład z ćwiczeniami, Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2014-2015

[2] John Duggan, Thomas Schwartz, *Strategic manipulability is inescapable: Gibbard-Satterthwaite without resoluteness*, *preprint*, Division of the Humanities and Social Sciences, California Institute Of Technology, 1992

[3] John Duggan, Thomas Schwartz, *Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized*, Social Choice and Welfare, tom 17, 2000, str. 85-93

[4] Michael Dummett, Robin Farquharson, *Stability in Voting*, Econometrica: Journal of the Econometric Society, tom 29, 1961, str. 33-43

[5] Allan Gibbard, *Manipulation of Voting Schemes: A General Result*, Econometrica: Journal of the Econometric Society, tom 41, 1973, str. 587-601

[6] Andreu Mas-Colell, Hugo Sonnenschein, *General Possibility Theorems for Group Decisions*, The Review of Economic Studies, tom 39, 1972, str. 185-192

[7] Hannu Nurmi, *Reflections on the Significance of Misrepresenting Preferences*, LNCS Transactions on Computational Collective Intelligence, tom 23, 2016, str. 149-161

[8] Kazimierz Rzążewski, Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski, *Każdy głos się liczy: Wędrówka przez krainę wyborów*, Wydawnictwo Sejmowe, Warszawa, 2014

[9] Mark A. Satterthwaite, *Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions*, Journal of Economic Theory, tom 10, 1975, str. 187-217

[10] Alan D. Taylor, *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*, Cambridge University Press, Mathematical Association of America, USA, 2005

[11] Alan D. Taylor, *The Manipulability of Voting Systems*, The American Mathematical Monthly, tom 109, 2002, str. 321-337